



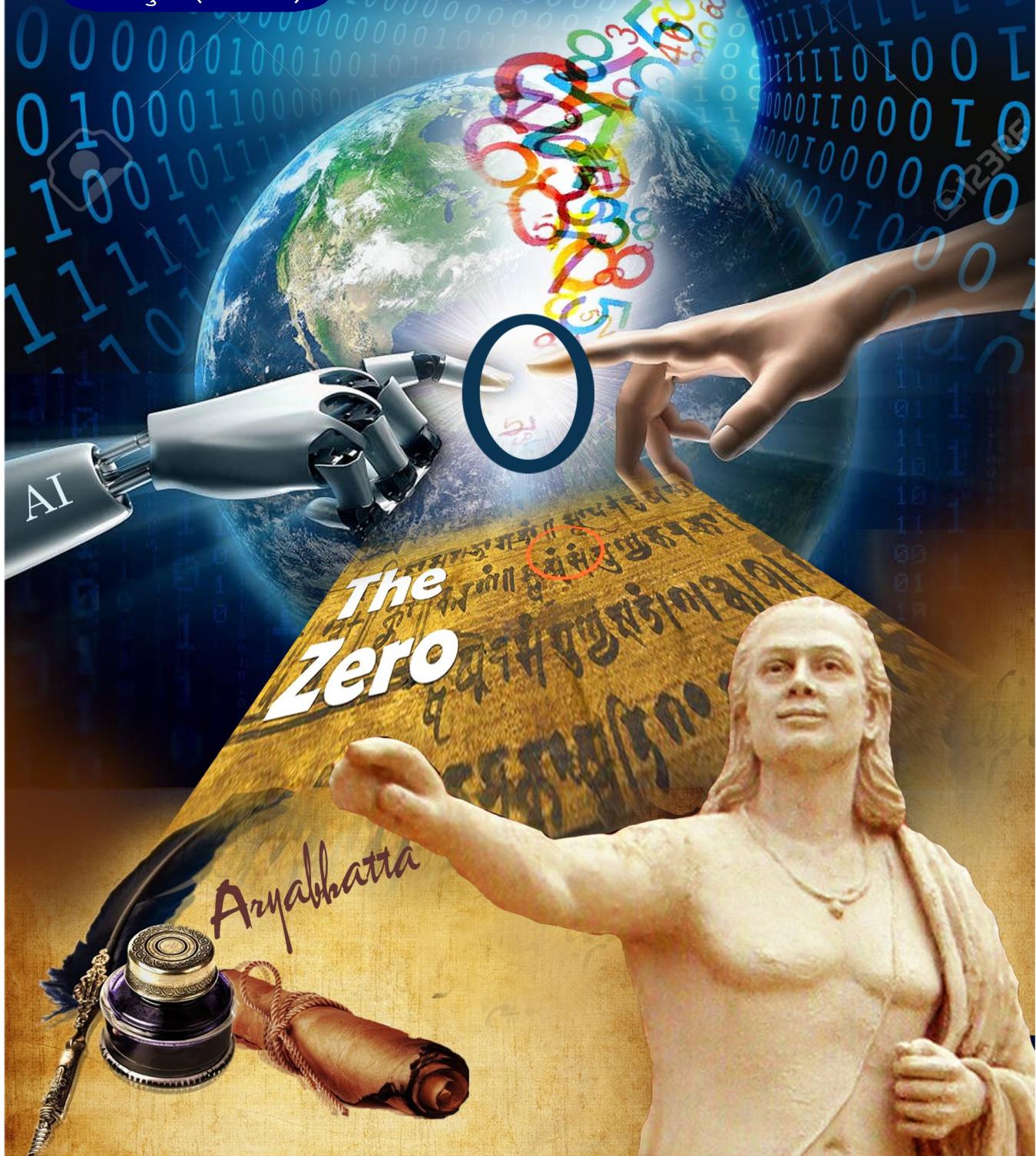
महाराष्ट्र गणित अध्यापक महामंडळाचे नियतकालिक

गणित शिक्षण

सन २०१९-२०

अंक दुसरा (मार्च २०२०)

विद्यार्थी, शिक्षक, पालक व जिज्ञासुंसाठी

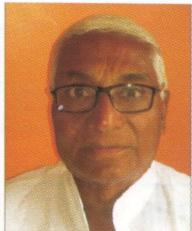


महाराष्ट्र गणित अध्यायक महामंडळ

सल्लागार मंडळ



श्री रविंद्र येरवाले सर
माजी अध्यक्ष म.ग.अ.म., सातारा



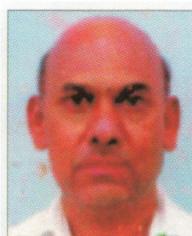
श्री सिद्धेश्वर मुंग्रे
माजी अध्यक्ष म.ग.अ.म., बार्फी



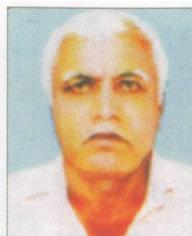
श्री जे.दी.मुंदे
माजी अध्यक्ष म.ग.अ.म., नांदेड



श्री नाना लामखेडे
माजी उपाध्यक्ष म.ग.अ.म., जामनेर



श्री व्ही.एस.शिंदे
माजी कार्यवाह म.ग.अ.म., लातूर



श्री एम.एस.वीर
कायदेशीर सल्लागार
लोकल ऑफीटरम.ग.अ.म., कोल्हापूर



श्री व्ही.व्ही.आंबोळे
लोकल ऑफीटरम.ग.अ.म., कोल्हापूर



सोलापूर येथे आयोजित कार्यकारिणी व सर्वसाधारण सभेतील क्षणचिन्हे २०१९-२०

भारतीय गणितज्ञ श्री श्रीनिवास रामानुजन
यांच्या कार्यास हा अंक समर्पित

जन्म. २२ डिसेंबर १८८७

मृत्यू २६ एप्रिल १९२०



महाराष्ट्र गणित अध्यापक महामंडळाचे त्रैमासिक

गणित शिक्षण

वर्ष : ४३ वे

अंक दुसरा

मार्च २०२०

- * संपादक / प्रमुख :- श्री दिनेश कि. पठसकर
जे.सी. हायस्कूल, कारंजा (लाड) जि.वाशिम
- * घरचा पत्ता :- तुषार कॉलनी विश्रामगृहाजवळ,
रा. कारंजा (लाड) जि.वाशिम ४४४ १०५
मो. क्र. ९४२३६५१७६६
ई-मेल : ganitshikshan@gmail.com
- * प्रमुख कार्यकारी संपादक :- श्री मोतीराम श्री. फडके
शाळेचे नाव :- वसंतराव नाईक विद्यालय, बिबी
ता. लोणार जि. बुलढाणा
- * व्यवस्थापक :- श्री माणिक सो.गायकी
शाळेचे नांव :- श्री दत्तात्रेय महाराज विद्यालय, कसुरा
ता.बाळापूर जि.अकोला
- * प्रकाशक :- श्री संजय ना. बाजी पाटील
शाळेचे नाव :- ज्ञान अंकुर विद्यालय, शिवाजीनगर
औरंगाबाद
- * अक्षर जुळवणी :- सचिन बारसे, कारंजा
- * मुद्रक :- श्री गणेश आर्ट्स, अकोला
- * प्रकाशन :- मार्च २०२०
- * वार्षिक वर्गणी :- ३५ रु. फक्त (दोन अंक)
- * बँक खाते क्रमांक :- बँक ऑफ महाराष्ट्र, खाते क्र. 60353452925
IFSC-MAHB0001584

अनुक्रमणिका

अ.क्र.	विवरण	पान क्रमांक
१)	राज्यस्तरीय प्रथम क्रमांक प्राप्त निबंध डॉ. श्री. गिरीश विठ्ठलराव वैद्य	५
२)	संस्मरणीय ठरलेले ४१ वे राज्यस्तरीय गणित अधिवेशन श्री. भाग्यविधाता भास्कर वारंग	१८
३)	राज्यस्तरीय गणित प्रश्नमंजुषा स्पर्धा श्री पुरुषोत्तम पंचभाई, विद्या समिती प्रमुख	२२
४)	कूट प्रश्न - श्री नरेंद्र पिपरे सर, नागपूर	२८
५)	गणित विषय ज्ञान व गणिताची भाषा श्री नवनाथ घुगे सर	३०
६)	गणित पारंगत नमुना उत्तरपत्रिका २०१९-२०	३३

संपादकीय

सप्रेम नमस्कार,

महाराष्ट्र गणित अद्यापक महामंडळाचे त्रैमासिक 'गणित शिक्षण' चा ४३ व्या वर्षातील शेवटचा अंक आपल्यासाठी घेऊन आलो आहोत.

गणित शिक्षणाच्या माध्यमातून विद्यार्थ्यांचा गणितीय दृष्टीकोन विकसित व्हावा हा उद्देश तर आहेच त्यासोबत आपल्या गणित शिक्षण बांधवामधील गुणांचा व त्यांचे विचार सर्वांसमोर मांडण्यासाठी मदत करणे हा सुद्धा आहे. म्हणूनच महाराष्ट्र गणित अद्यापक महामंडळातर्फे घेण्यात आलेल्या राज्यस्तरीय निबंध स्पर्धेतील डॉ. गिरीष वि. वैद्य यांचा प्रथम क्रमांक प्राप्त निबंध या अंकात प्रकाशित करीत आहोत. त्याचबरोबर मंडळामार्फत घेण्यात आलेल्या राज्यस्तरीय प्रश्न मंजूषा स्पर्धेचा अहवाल प्रकाशित करीत आहोत. त्यामुळे जिल्हास्तरीय निबंध स्पर्धा व प्रश्न मंजूषा स्पर्धा घेण्यासाठी मदत होईल.

संस्मरणीय ठरलेल्या महाराष्ट्र राज्य गणित अद्यापक महामंडळाचे गणित शिक्षकांचे राज्यस्तरीय अधिवेशन, श्री भाग्यविधाता भास्कर वारंग यांच्या अहवालातून आपल्या लक्षात येईल.

श्री नवनाथ घुले यांनी आपल्या गणित विषयाचे ज्ञान व गणिताची भाषा या लेखातून आपले मत मांडले आहे.

या अंकात शिक्षकांच्या लेखासोबतच मेंदुला खुराक, सुडोकु, पझळ, काही महत्त्वपूर्ण सूचना यांचा समावेश करून अतिशय मनोरंजक व अभ्यासयुक्त करण्याचा प्रयत्न केला आहे. येणाऱ्या अंकांना अधिक दर्जेदार बनविण्यासाठी आपले विचार, क्लृप्ट्या, लेख कोडी इत्यादी साहित्य पाठवावे. आपल्या सहकार्याने गणित शिक्षण नावीन्यपूर्ण, लोकोपयोगी व लोकप्रिय बनविण्यासाठी प्रतिसादाच्या प्रतीक्षेत....

धन्यवाद!

संपादक

माध्यमिक स्तरावरील गणित विषयाचे आधुनिक तंत्रज्ञानाद्वारे

कृतीयुक्त अध्ययन-अध्यापन काळाची गरज



डॉ. गिरीश विठ्ठलराव वैद्य
सहाय्यक शिक्षक
सुशील हिंमतसिंगका विद्यालय, वर्धा

ज्ञानयोगी होऊन आम्ही,
गणिताची कास धरु।
आकाशाला गवसणी घालू,

सूर्यालाही थळ करु।
दाही दिशांना जिंकून घेऊ,
भव्य ही आस्था।

प्रस्तावना :-

मानवी जीवनात गणिताचे महत्त्व अनन्यसाधारण आहे. गणिताशिवाय अभ्यास म्हणजे प्राणाशिवाय चेतनेशिवाय शरीर, अचेतन, सांगाडा. जीवनाच्यां सर्वच क्षेत्रात गणिती विचारांना महत्त्व आहे. विवेक, अचूकता, प्रमाणबद्धता यांसारखी मूळ्ये गणिताच्या अभ्यासाने रुजतात.

अर्थपूर्ण व यशस्वी जीवन जगण्यासाठी गणित विचारांची महद आवश्यकता आहे. गणिती दृष्टीमुळे साध्या वाटणाऱ्या गोष्टीत, बोलण्यात, वागण्यात, प्रीपक्ता, संयमीवृत्ती, शिस्त व जिज्ञासूवृत्ती येते. अशी माणसे चुकांची पुनरावृत्ती करीत नाहीत. त्यांच्या विचारांची दिशा योग्य असते. बोलण्या चालण्यात विस्कळीतपणा नसतो. 'हे विश्वची माझे घर' अशी वृत्ती असते. सर्व शास्त्रांचा पायाभूत आधार गणित आहे. व्यवहारशास्त्र, समाजशास्त्र, धर्मशास्त्र यात प्रत्येक किंवानाला अर्थ प्राप्त होतो तो केवळ आधार असतानाच, अन्यथा ते अर्थशून्य ठरते. थोडक्यात मानवी जीवन अर्थपूर्ण करणारे शास्त्र म्हणजे गणित. त्याचे वर्णन एका श्लोकात सुरेख केलेले आहे.

यथा शिखा मयुराणां, नागानां मण्यो स्थितं ॥ तथा वेदांग शास्त्राणां, गणिते मूर्धने स्थितं ॥

खगोलशास्त्र, भूगोल, भविष्य, सामाजिकशास्त्र, धर्मशास्त्र या सर्वात कळत न कळत गणित आहे. म्हणून सर्व शास्त्रांच्या शीर्षस्थानी ते विराजमान आहे.

आजचे युग हे संगणकीय युग आहे. या युगातील विद्यार्थी हा शिक्षणाची वेगळी ध्येये बाळगणारा आहे. त्याला त्याच्या आवडीनुसार शिक्षण घेता यावे, यामुळेच आजच्या शिक्षण पद्धतीमध्ये बदल झालेला दिसून येतो. अध्ययन-अध्यापन प्रक्रियेमध्ये विद्यार्थी अधिक कृतीशील व्हावा याकडे लक्ष दिले गेले आहे. विद्यार्थ्यांनी क्षमतांवर पूर्ण प्रभूत्व मिळवावे म्हणून अध्ययन-अध्यापनात शैक्षणिक साहित्याचा वापर केला जातो. माध्यमिक स्तरावर गणित या

विषयामध्ये प्रात्यक्षिक कार्याला विशेष महत्त्व दिले आहे. पारंपारिक प्रश्न आणि उत्तरे व पाठांतरावर आधारित उत्तराला छेद देणाऱ्या प्रकारापासून फारकत घेऊन विद्यार्थ्यांच्या सर्जनशील अभिव्यक्तिला चालना देणाऱ्या कृतींना स्थान देण्यात आले आहे. या कृतींना आधुनिक तंत्रज्ञानाची जोड दिल्यास अध्ययन-अध्यापन प्रक्रिया निश्चितच आनंददायी होईल यात शंका नाही.

प्रात्यक्षिकाव्दारे केलेल्या कृतीमुळे विद्यार्थी जास्त प्रभावीपणे शिकू शकतात. त्यामुळे शिकताना ताण-तणावाला तोंड यावे लागत नाही. त्यामधून मिळणारा अध्ययन अनुभव हा आनंददायी असतो. प्रात्यक्षिकासोबतच आधुनिक तंत्रज्ञानांतर्गत येणाऱ्या ‘संगणक’ या साधनाचा वापर विद्यार्थ्यांना प्रेरक म्हणून करता येतो. प्रत्येक विद्यार्थी त्याला करावयाचे कार्य त्याच्या गतीने पूर्ण करू शकतो. संगणकाचा अधिक चांगला वापर दर्जात्मक बौद्धिक अध्ययन कार्यपूर्ती करण्यासाठी करून घेणे ही त्या पुढची पायरी ठरते. संगणकाचा वापर अध्ययनासाठी करताना शिक्षकांनी सहज वापरता येणाऱ्या सॉफ्टवेअर्सची निवड केल्यास विद्यार्थी वापरात आणि सोपेपणा येऊ शकतो.

केवळ शारीरिक कृती करून जे साध्य होणार नाही ते बौद्धिक क्रियेने साध्य होते. विद्यार्थ्यांच्या अंतर्मनात अनेक प्रश्न निर्माण व्हावेत, तो अस्वस्थ व्हावा आणि त्याचबरोबर त्या प्रश्नांची उकल करण्यासाठी तो धडपडावा ही आधुनिक तंत्रज्ञानाव्दारे कृतियुक्त अध्ययन-अध्यापन या मागची संकल्पना आहे. यामुळे विद्यार्थ्यांचा आत्मविश्वास तर वाढतोच शिवाय विषयाची रुची निर्माण होण्यास सुद्धा मदत होते.

विषय प्रतिपादन :-

विद्यार्थी हा ज्ञानाचा केवळ स्वीकारकर्ता आहे, ही भूमिका बदलल्याशिवाय शाळेतील अध्ययन हे आनंददायी ठरणार नाही. वर्गात माहितीचे एकतर्फी प्रसारण न होता कोणत्याही दडपणाशिवाय विद्यार्थी कसे अध्ययन करतील हे पाहणे अत्यंत गरजेचे आहे. काही विद्यार्थी गणित विषयाचा अधिक कंटाळा करतात. हा कंटाळा घालविण्यासाठी सहज अध्यापन पद्धतीचा वापर करून आधुनिक तंत्रज्ञानाव्दारे कृतीचा वापर केल्यास गणितविषयक रुची निर्माण करता येते. याकरिता शिक्षकांनी स्वतः नावीण्याची कास धरणे अपेक्षित आहे. व्यवस्थेला दोष न देता स्वतःपासून, स्वतःच्या वर्गापासून शिक्षणाच्या बदलांची सुरुवात करणे आवश्यक आहे.

आधुनिक तंत्रज्ञानाच्या माध्यमातून विद्यार्थ्यांच्या मुक्त अभिव्यक्तीचा आदर व स्वीकार शिक्षकांनी केला पाहिजे. कृतियुक्त अध्ययन-अध्यापनाचा पुरस्कार वर्ग अध्यापनातून करणे

काळाची गरज आहे. रामदास स्वामी म्हणतात -

मुलांच्या चालीने चालावे, मुलांच्या मनोगते बोलावे,
तैसे जनास शिकवावे, हळूहळू ।

अध्यापनातील विविध तंत्रांचा, कौशल्यांचा, प्रयोगांचा वापर शिक्षकाने केला पाहिजे. अध्यापन कार्य अधिक प्रभावी होण्याकरिता काही आधुनिक तंत्रज्ञानावर आधारित कृतींचा खालीलप्रमाणे अध्यापनामध्ये समावेश करता येईल.

* शिक्षणाला पुढच्या पायरीवर घेऊन जाण्याचे काम डिजीटल तंत्रज्ञानाने केले आहे. क्यू आर कोड व्हारे मोबाईलच्या माध्यमातून संपूर्ण प्रकरणाची माहिती व्हिडिओव्हारे मिळते, ज्यामुळे प्रकरणातील विविध संकल्पना स्पष्ट होतात.

* गणिताच्या अध्यापनासाठी 'जिओजेब्रा' हे एक अत्यंत प्रभावी साधन आहे. गणितातील सिध्दांत शिकवणे यामुळे सुलभ झाले आहे. जे काम पूर्वी पेन्सिल आणि कंपासव्हारे व्हायचे ते आज संगणकावर तात्काळ होते. यामध्ये विद्यार्थ्यांना आनंद तर मिळतोच शिवाय वेळही वाचतो.

* गणित विषयात 'प्रत्यक्ष कृतीमधून अध्यापन' ह्या पद्धतीचा वापर करून गणिताचे परिणामकारक अध्यापन करता येईल. उदा. मापनाचे अध्यापन करताना प्रत्यक्ष एखाद्या दुकानाला भेट देऊन प्रत्यक्ष क्षेत्राच्या भेटीतून कृती करण्याची आणि अनुभव घेण्याची संधी विद्यार्थ्यांना प्राप्त झाल्यास गणित विषयक अधिक रुची निर्माण होऊ शकेल.

* विविध नावीण्यपूर्ण गणितीय खेळांच्या माध्यमातून गणित विषयाचे अध्यापन करणे अधिक उपयुक्त, मनोरंजक व परिणामकारक होईल. गणितीय खेळामध्ये गणिती कोड्याच्या माध्यमातून विद्यार्थ्यांना अध्यापन करणे ही उपयोगी अध्यापन पद्धती ठरेल.

* जिओजेब्राच्या माध्यमातून कोन मोजणे, लंब काढणे, रेषा दुभागणे, त्रिकोण काढणे इ. कृती मुलांकडून करवून घेतल्यानंतर प्रत्यक्षात त्यांना वहीवर आकृत्या काढावयास सांगितल्या तर त्यांच्या इतर उणिवा दूर करता येतात. यामुळे विषयाची समज पक्की होते.

अशा सहज पद्धतीने गणिताचे अध्यापन केल्यास विद्यार्थ्यांना कठीण वाटणारा विषय सहज करता येईल आणि ही आपणा शिक्षकांची महत्त्वपूर्ण जबाबदारी आहे. आधुनिक तंत्रज्ञानाव्हारे विविध उपक्रम कृतीच्या माध्यमातून करीत असताना कौशल्य संपादन, तर्क लढविणे इत्यादी गोष्टींवर भर दिला पाहिजे. या अनुभवातून विद्यार्थ्यांची इष्ट दिशेने प्रगती होईल. या अनुभवातूनच ज्ञान, उपयोजन, कौशल्ये इत्यादी उद्दिष्टे साध्य होतील व इतर अनेक उद्दिष्टे साध्य होण्यास मदत होईल.

आज तंत्रज्ञानाच्या युगात केवळ काही विद्यार्थ्यांचीच गुणवत्ता वाढवून चालणार नाही तर संपूर्ण वर्गाचा, शाळेचा शंभर टक्के निकाल आजच्या शिक्षण पद्धतीला अपेक्षित आहे. वर्गात हे सर्व साध्य करण्यासाठी विशिष्ट अशी एकच पद्धत किंवा तंत्र सांगता येणार नाही किंबहुना प्रत्येक घटकाच्या स्वरूपानुसार त्यात बदल करणे आवश्यक असते. कोणत्या घटकासाठी कोणती पद्धत, कोणते तंत्र वापरावे हे ठरलेले नसून शिक्षकांनीच ते आपल्या अभ्यासातून, अनुभवातून ठरवायचे असते. म्हणूनच कृतियुक्त अध्यापनासाठी अनेक पद्धती, तंत्रे उपयुक्त ठरतात त्याची माहिती घेणे व त्यात भर घालणे या दोन्ही बाबी सतत चालू ठेवणे आवश्यक असते.

ज्ञानरचनावादी दृष्टीकोनातून अध्यापन कार्य करीत माहिती-तंत्रज्ञानाच्या या युगात संगणक इंटरनेटव्दारे सहजपणे ज्ञान मिळवता येते. त्यामुळे शिक्षणाच्या, ज्ञानाच्या कक्षा रुंदावल्या आहेत. शाळांमधून एल.सी.डी. प्रोजेक्टरव्दारे ज्ञानाची देवाण-घेवाण करण्याची सोय उपलब्ध होऊ घातली आहे. त्यामुळे शिकवलेल्या अभ्यासक्रमाची उजळणी करणे सोयीचे जाते आणि गुणवत्ता विकास सहज शक्य होतो. ज्ञानरचनावाद हा तर कृतियुक्त अध्ययन-अध्यापन पद्धतीचा गाभा आहे. कृतीव्दारे अध्ययन ही पद्धती पूर्णपणे विद्यार्थीकिंवृती असल्यामुळे त्यापासून होणारे फायदे पुढील आकृतीमध्ये दर्शविले आहेत.



कृतियुक्त अध्ययन-अध्यापनाचे उपरोक्त फायदे लक्षात घेता शिक्षकांनी विद्यार्थी, कृतीव्दारा अध्ययनात सक्रिय सहभागी होतील याकडे लक्ष द्यावे. विद्यार्थ्यांचा वयोगट, त्यांच्या क्षमता लक्षात घेऊन त्यांच्यासाठी अध्ययन अनुभवांची योजना करावी. या अध्ययन अनुभवांत विद्यार्थी रस घेतील यासाठी प्रयत्न करावे तसेच मिश्र स्वरूपाचे गट तयार करून विद्यार्थ्यांना गटात काम करण्याची संधी द्यावी. एकंदरीत ही कृती अविरतपणे सुरु असणे अत्यंत गरजेचे आहे.

स्वतःचे अध्यापन अनुभव :-

अध्ययन-अध्यापनाच्या प्रचलित पद्धतीमध्ये विद्यार्थीं निष्क्रिय आणि पाठांतरावर अधिक भर देताना दिसून येतो. विद्यार्थ्यांकडून कृती होत नसल्याने विद्यार्थ्यांचे परिणामकारक अध्ययन होत नाही. शिवाय शाळेतील वातावरण, शिक्षकांचे साचेबद्द अध्यापन, कंटाळवाणी व पुरेशी कृती नसणारी अध्ययन-अध्यापन प्रक्रिया यामुळे मुलांना शाळेत शिकण्यापेक्षा शाळा सुटल्याचा अतिशय आनंद होतो.

या विद्यार्थ्यांना आधुनिक तंत्रज्ञानाव्दारे कृतियुक्त अध्ययनासाठी प्रवृत्त केल्यास विद्यार्थी अधिक चांगल्या प्रकारे शिकतील व शाळेत रमतील असा विचार करून त्या दिशेने प्रयत्न सुरू केले. याकरिता संगणकाच्या माध्यमातून 'जिओजेब्रा' या साधनाचा उपयोग करण्याचे ठरविले. गणिताच्या अध्यापनासाठी जिओजेब्रा हे एक अत्यंत प्रभावी साधन आहे. गणितातले सिधांत शिकवणे यामुळे सुलभ झाले आहे. याची आयकॉन्स अर्थात बोधचिन्हे ओळखण्यास सोपी आहेत. प्रत्येक आयकॉनमध्ये उपविभाग आहेत ज्यामुळे आकृतीचा नेमका प्रकार निवडता येतो.

इयत्ता ९ वी च्या विद्यार्थ्यांना गणित-२ विषयातील 'वर्तुळ' या प्रकरणातील परिवर्तुळ आणि अंतर्वर्तुळाची रचना करण्याकरिता विद्यार्थ्यांना संगणक कक्षामध्ये नेऊन संगणकावर जिओजेब्राच्या माध्यमातून ही रचना करण्यास शिकविताना पुढीलप्रमाणे क्रमवार पायऱ्यांचा अवलंब करण्यास सांगितला.

परिवर्तूळ रचना :-

परिवर्तूळाची रचना करण्यासाठी विद्यार्थ्यांना पुढीलप्रमाणे कृती करण्यास सांगण्यात आले.

- १) त्रिकोणाच्या आयकॉनवर किलक करून एक त्रिकोण काढा.
- २) ए, बी, सी हे बिंदू काढून पुन्हा ए ला स्पर्श केल्यावर त्रिकोण तयार होतो. तसा त्रिकोण तयार करा.
- ३) लंबदुभाजकाच्या आयकॉनवर किलक करून त्रिकोणाच्या एका बाजूला स्पर्श करताच लंब दुभाजक प्रदर्शित होतो. असाच लंबदुभाजक त्रिकोणाच्या दुसऱ्या बाजूवर तयार करा.
- ४) हे दोन्ही दुभाजक एकमेकास छेदतात त्या जागेवर बिंदूचा आयकॉन किलक करून छेदनबिंदू निर्देशित करा. हा वर्तुळाचा केंद्रबिंदू राहणार.
- ५) मध्यबिंदूपासून त्रिकोणाच्या व्हरटेक्स अर्थात शिरोबिंदूमधून जाणारे वर्तूळ तयार करा.

- ६) याकरिता वर्तूळाचा आयकॉन किलक करून मध्य बिंदूवर आणि नंतर शिरोबिंदूवर किलक करा. परिवर्तूळ तयार झाले.

विद्यार्थ्यांनी परिवर्तूळाची रचना केल्यानंतर त्यांना अंतर्वर्तूळाची रचना करण्यास सांगितले.

अंतर्वर्तूळाची रचना परिवर्तूळप्रमाणेच आहे. मात्र या वेळेस त्रिकोणाच्या बाजूचे विभाजन न करता त्याएवजी कोन दुभागण्यास सांगितले. कोणतेही दोन कोन दुभाजक एकमेकांस छेदतात त्या मध्यबिंदूपासून त्रिकोणाच्या बाजूपर्यंत वर्तूळ तयार करण्यास सांगितले. याकरिता वर्तूळाचा आयकॉन किलक करून मध्य बिंदूवर आणि नंतर कोणत्याही एका बाजूवर किलक करण्यास सांगितले. अंतर्वर्तूळ तयार झाले. याप्रमाणे विद्यार्थ्यांनी कृती केल्यानंतर खालीलप्रमाणे परिवर्तूळ व अंतर्वर्तूळ तयार झाले.

जिओजेब्राच्या माध्यमातून परिवर्तूळ व अंतर्वर्तूळाची रचना केल्यामुळे विद्यार्थ्यांना संगणकाच्या माध्यमातून स्वतः रचना केल्याचा आनंद तर झालाच शिवाय ज्ञानरचनावादाची अंमलबजावणी झाली. जिओजेब्राच्या माध्यमातून भौमितिक रचनेचे संबोध स्पष्ट झाल्यामुळे विद्यार्थ्यांनी वेगवेगळ्या त्रिकोण, चौकोन व वर्तूळासंबंधीच्या रचना कंपासच्या व स्केलच्या साहाय्याने अचूक केल्या.

इयत्ता आठवीच्या विद्यार्थ्यांनी चौकोन रचना व इयत्ता दहावीच्या विद्यार्थ्यांनी वर्तूळ स्पर्शिका, समरूप त्रिकोण इ. भौमितीक रचना जिओजेब्राच्या सहाय्याने पूर्ण केल्या.

इयत्ता दहावीच्या विद्यार्थ्यांना गणित-२ या विषयांतर्गत जिओजेब्राचा उपयोग अधिक चांगल्या प्रमाणात झाला. महत्त्वमापन या प्रकरणातील इष्टिकाचिती, घन, गोल, दंडगोल, शंकू इ. आकृत्या त्यांना त्रिमितीय स्वरूपात बघता आल्या व त्यावरून त्या आकृत्या संदर्भातील संबोध स्पष्ट करण्यास मदत झाली. या आकृत्या जिओजेब्रामध्ये खालीलप्रमाणे दिसून आल्या.

‘महत्त्वमापन’ या प्रकरणांतर्गत त्रिमितीय स्वरूपात या आकृत्या बघितल्यामुळे विद्यार्थ्यांचे, क्षेत्रफळ, पृष्ठफळ, घनफळ, कडा, शिरोबिंदू, एकूण पृष्ठभाग, आयलरच्या सूत्राचा (Euler's Rule) पडताळा इ. संबोध पक्के झाले. तसेच विषयाची गोडी वाढली.

‘जिओजेब्रा’ या संगणकीय साधनाचा उपयोग केवळ भूमिती या विषयाकरिताच होतो असे नाही, तर बीजगणित या विषयाकरिता सुद्धा त्याचा अधिक चांगला उपयोग करता येतो.

इयत्ता १० वी च्या विद्यार्थ्यांना गणित विषयातील ‘दोन चलातील रेषीय समीकरणे’ या प्रकरणातील आलेख रचना करण्याकरिता संगणक कक्षामध्ये नेऊन संगणकावर जिओजेब्राच्या माध्यमातून ही रचना करण्यास शिकविताना पुढील प्रमाणे क्रमवार पायऱ्यांचा अवलंब करण्यास सांगितला.

आलेख रचना :-

आलेखाची रचना करण्यासाठी विद्यार्थ्यांना पुढीलप्रमाणे कृती करण्यास सांगण्यात आले.

- १) x आणि y यांची बेरीज ९ आहे. इनपुट बॉक्समध्ये पहिले समीकरण $x + 3y = 9$ लिहा व एन्टर दाबा. (क्षणार्धात आलेखावर रेषा प्रदर्शित झाली.)
- २) $2x$ आणि y यांची वजाबाकी ४ आहे. इनपुट बॉक्समध्ये दुसरे समीकरण $2x - y = 4$ लिहा व एन्टर दाबा. (क्षणार्धात याही समीकरणाची रेषा आलेखावर प्रदर्शित झाली.)
- ३) दोन्ही रेषा एकमेकांना छेदतात त्या जागेवर बिंदूचा आयकॉन किलक करून छेदन बिंदू प्रदर्शित करा.
- ४) या छेदन बिंदूचे निर्देशक (*co-ordinates*) आलेखाच्या बाजूला समासात दिसतात. तेच उत्तर आहे.

विद्यार्थ्यांनी छेदनबिंदूचे निर्देशक (3, 2) येत असल्याचे सांगितले. याप्रमाणे विद्यार्थ्यांनी कृती केल्यानंतर खालीलप्रमाणे आलेख रचना तयार झाली.

वरीलप्रमाणे आलेख रचना केल्यानंतर विद्यार्थ्यांनी स्वतः काही समीकरणे तयार केली व छेदनबिंदूचे निर्देशक शोधून काढले. हे निर्देशक म्हणजेच समीकरणाची उकल आहे हे विद्यार्थ्यांच्या लक्षात आले. अशाप्रकारे विद्यार्थ्यांनी दोन चलातील रेषीय समिकरणे या प्रकरणातील आलेखावरिल आधारित भागाचा सराव करून विषय वस्तू पक्की केली.

थोडक्यात आजच्या काळातील जिओजेब्रा हे अत्यंत उपयुक्त असे तंत्रज्ञान आहे. मी स्वतः हे तंत्रज्ञान विद्यार्थ्यांकरिता उपयोगात आणल्यामुळे याची उपयुक्तता विद्यार्थ्यांसोबतच पालकांना पटवून देता आली. जिओजेब्रा फ्री डाउनलोडव्हदरे सहज उपलब्ध आहे. राज्य मंडळाने तयार केलेल्या सी.डी.मध्ये जिओजेब्रा आहेच. टॅबमध्ये सुद्धा आपण याचा उपयोग करू शकतो. टॅबच्या स्वरूपात विद्यार्थ्यांना इलेक्ट्रॉनिक पाटी पेन्सिल मिळाली आहे असे म्हणण्यास हरकत नाही.

नवे तंत्रज्ञान : क्यूआर कोड

फळा आणि खडू यामध्ये अडकलेल्या परंपरागत शिक्षण प्रणालीला महाराष्ट्र शासनाच्या शिक्षण विभागाबद्दारे 'क्यूआर कोड' च्या माध्यमातून व उपक्रमातून स्मार्ट आणि डिजीटल रूप देऊन नवा शैक्षणिक आयाम देण्यात आला आहे. क्यूआर कोडच्या माध्यमातून 'डिजीटल एज्युकेशन' ची संकल्पना मी शाळेत राबविली.

सदयास्थितीमध्ये प्राथमिक व माध्यमिक स्तरावरिल सर्व माध्यमांच्या पाठ्यपुस्तकातील प्रकरणांना क्यूआर कोड देण्यात आला आहे. या क्यूआर कोडची ओळख करून देण्यासाठी मी सर्वप्रथम पालकांचे समुपदेशन केले. त्यानंतर विद्यार्थ्यांना पालकांच्या परवानगीने एक दिवसाकरिता शाळेत आणण्यास सांगितले. दुसऱ्या दिवशी विद्यार्थ्यांना मोबाईलमध्ये दिशा अँपच्या माध्यमातून क्यूआर कोड स्कॅन करण्यास शिकविले. क्यूआर कोड समोर विद्यार्थ्यांने आपला मोबाईल धरला की, संपूर्ण प्रकरणाची माहिती व्हीडीओ व ऑडीओ क्लिपबद्दारे मिळते. अभ्यासाच्या पद्धतीतील हा बदल इतका नव्या आविष्काराने नटलेला होता की, विद्यार्थ्यांची समजून उमजून घेण्याची क्षमता कितीतरी पटींनी वाढली. याशिवाय मोबाईल केवळ गेम्ससाठी वापरायचा नाही तर अभ्यासासाठीही वापरायचा हे देखील मुलांना समजले. गेल्यावर्षीपासून हा उपक्रम राबविण्यास सुरुवात केली. आता विद्यार्थी क्यूआर कोडचा वापर करून पालकांच्या मदतीने संबंधीत प्रकरणाची माहिती व व्हीडीओ बघतात. त्यामुळे विषयाचे आकलन अधिक चांगले होते. आधुनिक काळातील हे तंत्रज्ञान विद्यार्थी, शिक्षक व पालक या सर्वांसाठी एक पर्वणीच ठरले आहे.

एकविसावे शतक हे माहिती तंत्रज्ञानाचे युग आहे. विद्यार्थ्यांना एकविसाव्या शतकासाठी सक्षम बनविण्याकरिता अध्यापनात संगणक व तंत्रज्ञानाचा वापर होणे अपरिहार्य आहे. इंटरनेट ही जादूची कांडी विद्यार्थ्यांच्या हाती लागली आहे. तसेच चा देखील अध्यापनात वापर सुरु झाल्याने विद्यार्थी ई-मेल व्हरे पत्र व्यवहार करू लागले आहेत. विकिपिडीया, ब्लॉग, वेबसाईट व फेसबुकबद्दारे झानाची कवाडे विद्यार्थ्यांसाठी खुली झाली आहेत. शाळेमध्ये विद्यार्थ्यांना हे मार्गदर्शन मिळाले तर अध्ययन-अध्यापन प्रक्रिया अधिक रंजक होते.

मुलांचं रंजक विश्व जर त्यांच्या पाठ्यपुस्तकामध्ये डोकावलं तर मुले त्याकडे आकृष्ट होतात. आज डिजीटल क्रांतीचा प्रसार शहरी भागापासून ग्रामीण भागापर्यंत पोहोचल्याने मुलांच्या स्मार्ट फोन हाताळण्याच्या कौशल्याचा वापर जर शिक्षणासाठी केला तर त्याचा फायदा शिक्षणाच्या प्रगतीसाठी नक्कीच होतो. हाच धागा पकडून अमूर्त कल्पना मूर्त करून देण्याचे कार्य आधुनिक तंत्रज्ञानाच्या माध्यमातून सुरु आहे.

स्वनिर्मिती व संशोधन

वर्गातील प्रत्यक्ष अध्ययन-अध्यापनात अपेक्षित क्षमता विकसित करून शैक्षणिक उद्दिष्ट्ये साध्य करण्यासाठी अभ्यास विषयक उपक्रमांचे आयोजन करणे आवश्यक असते. शैक्षणिक उद्दिष्ट्ये साध्य करण्यासाठी हस्तखेळत, रंजकपणे आणि आकृतीव्दारे दिल्या जाणाऱ्या व अध्ययन-अध्यापनातून शिकण्याच्याला शिकण्याचा आंतरिक आनंद देणारी आणि अध्ययनाचे जडत्व कमी करणारे शिक्षण ठरते.

विद्यार्थ्यांनी क्षमतांवर पूर्ण प्रभुत्व मिळवावे म्हणून अध्ययन-अध्यापनात शैक्षणिक साहित्याचा वापर केला जातो. क्षमतानिहाय आकर्षक शैक्षणिक साहित्य तयार करून त्याचा कल्पकतेने व आनंददायी पद्धतीने वापर करणे हा सुद्धा शैक्षणिक तंत्रज्ञानाचाच एक भाग आहे. आनंददायी शिकण्यामध्ये शैक्षणिक साहित्य निर्मिती व वापराला फार मोलाचे स्थान आहे. आनंददायी शिकण्यामध्ये शैक्षणिक साहित्य निर्मिती व वापराला फार मोलाचे स्थान आहे. विद्यार्थ्यांने केलेल्या कृतीतून ९५ ते १००% झान ग्रहण होते. यावरून शैक्षणिक साहित्य निर्मिती वापर याचे आनंददायी शिकण्यातील महत्त्व समजते.

शिकण्यातील शैक्षणिक साहित्याच्या वापरामुळे मिळणारे झान टिकावू स्वरुपाचे असते. वर्ग अध्यापनात शैक्षणिक साहित्याचा वापर केल्यास मुलांचा बौद्धिक ताण कमी होऊन मनोरंजनातून झानग्रहण केले जाते. ही बाब लक्षात घेता कमीत कमी खर्चात शैक्षणिक साहित्य तयार करण्याची संकल्पना सुचली. ही शैक्षणिक साधने तयार करताना पुढील शैक्षणिक उद्दिष्ट्ये डोळ्यासमोर ठेवली.

शैक्षणिक उद्दिष्ट्ये :-

- १) कमीत कमी खर्चात शैक्षणिक साहित्याची निर्मिती करणे.
- २) बहुभुजाकृतीमधील आंतरकोन मोजता येणे.
- ३) वर्तुळात तयार होणाऱ्या कोनांचे गुणधर्म तपासणे.
- ४) समांतर रेषा व छेदिकेमुळे तयार होणारे कोन आणि त्यांचे गुणधर्म तपासणे.
- ५) त्रिकोणमितीय गुणोत्तरांचा पडताळा घेणे.
- ६) निदेशक भूमितीमधील कोन अभ्यासणे.
- ७) कोनांची एकरुपता तपासणे.
- ८) भूमितीय गुणधर्म पडताळून पाहणे.

- ९) विद्यार्थ्यांना शैक्षणिक साहित्य स्वतः तयार करण्याची आवड निर्माण करणे.
- १०) कोनांचे सर्व प्रकार, गुणधर्म, प्रमेय प्रत्यक्ष पडताळून बघणे.
- ११) विद्यार्थ्यांच्या कृतिशीलतेला वाव देणे.

प्रत्यक्ष कार्यवाही :-

- १) शिक्षकांनी विद्यार्थ्यांना जे शैक्षणिक साहित्य तयार करावयाचे आहे त्याबद्दल वर्गामध्ये माहिती सांगावी.
- २) शैक्षणिक साहित्य तयार करण्यामागचे उद्देश, फलनिष्पत्ती याबाबत सविस्तर माहिती घ्यावी.
- ३) शैक्षणिक साहित्य तयार करताना कमीत कमी खर्च येईल याची दक्षता घ्यावी.
- ४) शैक्षणिक साहित्य विद्यार्थ्यांना सहज हाताळता येतील असे असावे.
- ५) विद्यार्थ्यांना मार्गदर्शनाखाली शैक्षणिक साहित्य तयार करण्याची मुभा घ्यावी.
- ६) स्केल, कोनमापक, वर्तुळाकार कोनमापक, दोरा, तार इत्यादी साहित्यातून खालीलप्रमाणे शैक्षणिक साहित्य तयार करावे.

शैक्षणिक महत्त्व :-

गणिताची मूलभूत संकल्पना स्पष्ट करण्यासाठी शैक्षणिक साधनांची गरज असते, पण ती उपलब्ध नसतात. ही उणीच भरून काढण्यासाठी कमी किंमतीत तयार होणाऱ्या या साधनांचा उपयोग करता येतो.

ज्ञानरचनावादाचा गणितीय सिद्धांतासाठी वापर करणे शक्य होते. ज्ञानरचनावादाच्या तत्त्वामध्ये विद्यार्थ्यांच्या मूळ संकल्पना कृतीतून स्पष्ट होतात. विद्यार्थ्यांना स्वतःच्या रचनेसाठी व शिकवलेल्या गोष्टीच्या वापरासाठी स्वातंत्र्य मिळते. विविध प्रकारचे अध्ययन साहित्य विद्यार्थी स्वतः हाताळतात. विविधांगी अध्ययनाचे अनुभव विद्यार्थी स्वतः घेतात. त्यामुळे गणितातील मूळ संकल्पना विद्यार्थ्यांच्या मनावर कायम कोरल्या जातात.

‘कृतियुक्त अध्ययन-अध्यापनाने, उजळल्या शिक्षणाच्या ज्योती

प्रत्येक मूळ हे नक्की घडणारच, अशीच अमुच्या शाळेची ख्याती’

याआधी सांगितल्याप्रमाणे विद्यार्थ्यांना विविध भौमितीक संकल्पना स्पष्ट करून सांगितल्यानंतर त्रिकोण, चौकोन, वर्तुळ, षटकोन, यातील संकल्पना स्पष्ट होण्यासाठी त्या विविध आकारांचे कार्ड दाखवून बाजू व कोन प्रत्यक्षात मोजण्यास सांगून विविध संकल्पनांचा परस्पर संबंध स्पष्ट करावा.

संशोधन :-

शिक्षण क्षेत्रात अध्यापन व अध्ययन पद्धतीत कालपरत्वे अनेक बदल होत गेले. गणित या विषयामध्येसुद्धा कृतीला विशेष महत्व दिले गेले. विद्यार्थी कृतियुक्त झाल्यामुळे त्याची पंचेद्रिये एकत्रीत ज्ञान ग्रहण करतात. विद्यार्थ्यांना गणिती पडताळा मिळाल्यामुळे ते तर्कबुद्धीने मूर्ताकडून अमूर्ताकडे विचार करण्यास प्रवृत्त होतात. शिक्षक-विद्यार्थी आदान-प्रदान प्रक्रिया वाढीस लागते. शैक्षणिक साधने हा गणित अध्यापनातील महत्वाचा भाग आहे. प्रयोगातून सर्जनशीलता व सर्जनशीलतेतून आनंद मिळाल्याने आनंददायी शिक्षण प्रक्रिया साकारता येते.

‘गणिताची प्रयोगशाळा’ ही संकल्पना आता रुढ होत आहे. प्रयोगशाळेचे दरवाजे, खिडक्या खिडक्यांची चौकट, पडदे या सर्वातून गणिती आकार साकारता येतात. शाळेभोवतीचे कुंपण, परिसर, बागेची रचना, प्रतिकृती यातून गणिती दृष्टिकोन साकारता येतो. गणित प्रयोगशाळेत केलेले नावीण्यपूर्ण प्रयोग म्हणजे संशोधनात्मक कृतीच आहे.

वर्तुळाच्या संदर्भात π (Pie) या स्थिरांक संख्येचा पडताळा घेण्यासाठी खालीलप्रमाणे प्रयोग विद्यार्थ्यांकरिता करता येतो.

प्रयोग :- वर्तुळाच्या परिधाच्या सूत्राचा पडताळा घेणे.

साहित्य :- भिन्न त्रिज्येची वर्तुळे, मीटरपट्टी, दोरा इ.

कृती :- विद्यार्थ्यांना भिन्न वर्तुळाची त्रिज्या, व्यास व परिधि मोजण्यास सांगावे. आलेल्या वाचनाची नोंद पुढील तक्त्यात करण्यास सांगावे.

अ.क्र.	परीघ	व्यास	परीघ+व्यास	परीघ - व्यास	परीघ \times व्यास	$\frac{\text{परीघ}}{\text{व्यास}}$
१						
२						

वरील तक्त्याचे निरीक्षण करून निष्कर्ष काढता येतो व सूत्राचा पडताळा घेता येतो.

निष्कर्ष - $\frac{\text{परीघ}}{\text{व्यास}} = \text{स्थिरांक}$, ही संख्या π या अक्षराने दर्शवू.

अशाप्रकारे एक प्रयोग झाल्यानंतर संबंधित सूत्राच्या/नियमाच्या तत्त्वाच्या दृढीकरणासाठी प्रश्नावली भरून दृढीकरण करता येते.

आधुनिक तंत्रज्ञानांतर्गत संगणकाच्या सहाय्याने इ.दहावीच्या विद्यार्थ्यांसाठी ‘संभाव्यता’ करण्याचे ठरविले. विद्यार्थ्यांना संगणकावर गेम्स खेळण्यात अत्यंत आनंद वाटत असतो.

खेळाच्या माध्यमातून संभाव्यता ह्या प्रकरणाच्या अभ्यासासाठी एक संगणक कार्यक्रम (Program) तयार केला. यामध्ये पत्ते, नाणोफेक, फासे (Dice) टाकणे इ. खेळांचा समावेश केला.

पत्त्यांचा खेळ निवडला असल्यास हव्या असलेल्या पत्त्यांचा प्रकार चौकटीमध्ये लिहून एन्टर ही कळ दाबल्यास आपण दिलेल्या प्रकाराची (Event) संभाव्यता दर्शविली जाते. उदा. विद्यार्थ्यांने ५२ पत्त्यांमधून केवळ 'एक' अर्थात 'A' हा पत्ता निघण्याच्या संभाव्यतेसाठी दिलेल्या चौकटीमध्ये 'A' लिहून एन्टर ही कळ दाबल्यास संगणकाच्या पड्यावर खालीलप्रमाणे चित्र येऊन त्याची संभाव्यता दर्शविली जाते.

५२ पत्त्यांपैकी ४ पत्ते हे 'एक' अर्थात 'A' दर्शविणारे आहेत. संगणकाने पड्यावर पुढीलप्रमाणे संभाव्यता दर्शविली.

$$P(A) = \frac{1}{13}$$

हा प्रयोग लाल रंगातील पत्ते अथवा काळ्या रंगातील पत्ते यासाठी सुद्धा करता येतो. ५२ पत्त्यांमधील A ते क्रमांक १० तसेच जोकर, राजा, राणी यांची संभाव्यता, काळ्या व लाल रंगाच्या पत्त्यांनुसार येणारी संभाव्यता पडताळून पाहता येते.

पत्त्यांच्या खेळाप्रमाणेच नाणे फेक, फासे (Dice) टाकणे या खेळामधून सुद्धा विद्यार्थ्यांचा संगणकाच्या माध्यमातून संभाव्यता हा संबोध स्पष्ट होतो. अशाप्रकारे माहिती तंत्रज्ञानाच्या या युगात संगणक, मोबाईलचा वापर अपरिहार्य झाला आहे. ज्ञानरचनावादाला तंत्रज्ञानाची जोड दिली जात आहे. कृतियुक्त अध्ययन-अध्यापनात विद्यार्थी हा केंद्रबिंदू बनला आहे. अध्यापन प्रक्रिया देखील विद्यार्थी केंद्री असावी, त्यामध्ये रंजकता असावी, नावीण्य असावे, उपक्रमशीलता असावी त्याचबरोबर किती शिकवितो यापेक्षा काय शिकवितो, कसे शिकवितो व विद्यार्थी काय व कसे शिकतो याकडे ही लक्ष देणे गरजेचे आहे.

शिक्षकांनी आपल्या अध्यापनात आधुनिक तंत्रज्ञानाव्दारे विद्यार्थ्यांकडून कृती करून घेतल्यास विद्यार्थ्यांमध्ये अपेक्षित वर्तन बदल निश्चितपणे दिसून येतात. स्वतः केलेल्या कृतीमुळे अनुभव, चिंतन, आकलन यातून विद्यार्थी ज्ञाननिर्मिती करू शकतात म्हणून त्यांची धारणा पक्की होते. यात शिक्षकांची भूमिका अधिक जबाबदारीची व महत्त्वाची ठरते. विद्यार्थ्यांना स्वतःहून शिकण्याचा आनंद मिळवून देणे, त्यांच्या विचार प्रक्रियेला चालना देणे हा विधायक बदल घडवून आणणे हे आपणा सर्व शिक्षकांचे आद्यकर्तव्य ठरते. यासाठी शिक्षकांनी अत्यंत कृतीशील आणि संयमी असावे. विद्यार्थी हे शिक्षकांचे दैवत मानून आपण आपल्या कर्तव्याची जाणीव

ठेवून अध्यापनाच कार्य करावे असेच शासन व समाज यांना अपेक्षित आहे. ते आपले कर्तव्यही आहे. विद्यार्थ्यांमध्ये विधायक बदल घडवून आणण्यासाठी आपण सर्व शिक्षक बंधू-भगिनी सक्षम आहोत एवढे मात्र निश्चित. शेवटी आपणा सर्वांसाठी एवढेच म्हणता येईल -

‘दिवस उगवता मावळण्याआधी
साह्यभूत व्हावे सम जीवन
स्पर्शामधूनी अन लाभावे
असंख्य जिवांना संजीवन

अशीच माझी अतीव तळमळ
एकमेव इच्छा नि प्रार्थना
साह्यभूत व्हावे मम जीवन
मार्गामध्ये येणाऱ्यांना.’’

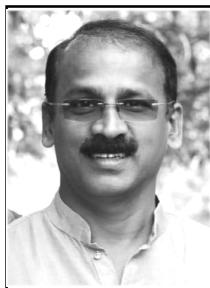
इतर संदर्भ :-

- १) गणित शिक्षण (मार्च-२०१५), महाराष्ट्र गणित अध्यापक महामंडळ (महाराष्ट्र राज्य)
- २) शिक्षण संक्रमण(ऑक्टो.-२०१५),महाराष्ट्र राज्य माध्यमिक व उच्च माध्यमिक शिक्षण मंडळ पुणे.
- ३) जीवन शिक्षण (ऑगस्ट-२०१८),महाराष्ट्र राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद,पुणे.
- ४) जीवन शिक्षण (नोव्हें.-२०१८),महाराष्ट्र राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद,पुणे.
- ५) जीवन शिक्षण (फेब्रु.-२०१९),महाराष्ट्र राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद,पुणे.
- ६) शिक्षण संक्रमण (एप्रिल-२०१९),महाराष्ट्र राज्य माध्यमिक व उच्च माध्यमिक शिक्षण मंडळ, पुणे
- ७) गणित पाठ्यपुस्तक (भाग-१ व भाग-२), इ.९ वी. व १० वी. महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती व अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे

संदर्भ ग्रंथसूची :-

- १) आगलावे, डॉ.प्रदीप (२०००), संशोधन पद्धती शास्त्र व तंत्रे, विद्या प्रकाशन, नागपूर.
- २) ओक, सुमन (१९८४) शैक्षणिक तंत्रविज्ञान, श्रीविद्या प्रकाशन, पुणे.
- ३) दांडेकर, वा.ना. (१९९२) शैक्षणिक मूल्यमापन व संख्याशास्त्र, श्रीविद्या प्रकाशन,पुणे.
- ४) जगताप, ह.ना.(१९९९) प्रगत शैक्षणिक तंत्रविज्ञान, नूतन प्रकाशन, पुणे.
- ५) खानापुरकर, ह.कृ. (१९७८) शैक्षणिक उपपत्ती, नूतन प्रकाशन, पुणे
- ६) पाटील, लीला (१९९०) आजचे शिक्षण आजच्या समस्या, श्रीविद्या प्रकाशन, पुणे.
- ७) पवार, प्रा.ना.ग.(१९९१) उदयोन्मुख भारतीय समाजातील शिक्षण, नूतन प्रकाशन पुणे.
- ८) गणित, इ. ८ वी. महाराष्ट्र राज्य माध्यमिक व उच्च माध्यमिक शिक्षण मंडळ, पुणे.

संस्मरणीय ठरलेले ४१ वे राज्यस्तरीय गणित अधिवेशन



भाग्यविधाता भास्कर वारंग
B.Sc., M.Ed., Dip. V.G.
नर्मदाबाई अनंत शिवाजी देसाई
विद्यालय, वालावल, ता.कुडाळ
जि.सिंधुदुर्ग (मो.नं.९४२३२१३२४०)

महाराष्ट्र राज्य गणित अध्यापक महामंडळाचे गणित अध्यापकांचे, ४१ वे राज्यस्तरीय अधिवेशन, दि. १० व ११ जानेवारी २०२० रोजी, सिंधुदुर्ग जिल्ह्यातील तळकोकणात, वसुंधरा विज्ञान केंद्र, नेरुपार, ता. कुडाळ येथे दिमाखात संपन्न झाले. निसर्गरम्य परिसर, अधिवेशनस्थळी निर्माण करण्यात आलेले शैक्षणिक वातावरण निर्मिती, राज्यभरातून लाभलेली उपस्थिती, कार्यक्रमांची वैचारिक रेलचेल साथीला चविष्ट भोजनाचा आस्वाद व सिंधुदुर्ग गणित अध्यापक मंडळाचे नेटके आयोजन आदीमुळे हे अधिवेशन संस्मरणीय ठरले.

अधिवेशनाचे रितसर उद्घाटन शुक्रवार १० जानेवारी २०२० रोजी सकाळी १०.०० वा. राज्याचे माजी शिक्षण संचालक महावीर माने यांच्याहस्ते दीपप्रज्वलनाने झाले. यावेळी 'रामनुजन' यांच्या प्रतिमेला पुष्पमाला अर्पण करून तुळशी रोपाला पाणी घालण्यात आले. कार्यक्रमाच्या अध्यक्षस्थानी राज्य गणित अध्यापक महामंडळाचे अध्यक्ष सुनील ओंकारप्रसाद श्रीवास्तव होते.

गणिताची गुणवत्ता टिकवायची असेल, तर गणित संशोधन करणाऱ्या विद्यापीठांची निर्मिती करण्याचे कार्य महामंडळाकडून व्हावयास हवे, असे प्रतिपादन उद्घाटकीय मनोगतामध्ये महावीर माने यांनी केले. नवीन अध्यापन पद्धती आत्मसात करण्याची गरज व्यक्त करत विनापरवाना शाळा शिक्षकांची परिस्थिती गंभीर असल्याची खंत त्यांनी व्यक्त केली. अध्यक्षीय मनोगतातून सुनील श्रीवास्तव यांनी महामंडळाच्या उपक्रमांचा आढावा घेत, मंडळाचे फेसबुक पेज, मंडळाचे कार्य याबाबत माहिती दिली.

यावेळी व्यासपीठावर राज्य महामंडळाचे कार्यवाह संजय नारायणराव बाजीपाटील, माध्यमिक शिक्षणाधिकारी अशोक कडूस, डाएटचे प्राचार्य पी.व्ही.जाधव, महाराष्ट्र गणित अध्यापक महामंडळाचे उपाध्यक्ष औंदुंबर भागवत(सिंधुदुर्ग), जिल्हा गणित मंडळाचे अध्यक्ष वामन खोत, कार्यवाह तुकाराम पेडणेकर, महामंडळाचे सल्लागार व्ही.व्ही. आंबोळे, व्ही.एस.शिंदे, राज्य

सहकार्यवाह एल.एन. लामखेडे (जळगांव), दिनेश कि.पळसकर (वाशिम), राज्य सदस्य पी.के.बोंड(ठाणे), बी.ए.हावळे(बीड), पी.एन.पांढरे (रत्नागिरी), आर.पी.कावरे(अमरावती), एस.के.बिराजदार (सोलापूर), पी.बी. पंचभाई(नागपूर), आर.एम.येवले, जिल्हा विज्ञान मंडळाचे अध्यक्ष पांडुरंग काकतकर, जिल्हा उपाध्यक्ष अनंत जामसंडेकर, विजय गावकर, उमेश वाळवेकर, सहकार्यवाह दिनकर पाटील, किशोर चव्हाण, विष्णु रेडकर, महामंडळ प्रतिनिधी सुनील कुंभार, संभाजी नलगे आदीसह राज्य व जिल्हा मंडळाचे पदाधिकारी व सदस्य उपस्थित होते.

कार्यक्रमाचे प्रास्ताविक संजय बाजीपाटील व वामन खोत, स्वागत स्वागताध्यक्ष औंदुंबर भागवत, सूत्रसंचालन डी.एस.पाटील यांनी केले. नरडवे (ता.कणकवली) चे निवृत्त मुख्याध्यापक मनोहर काजरेकर यांनी गणित गीत व ईशस्तवन कुडाळ हायस्कूलच्या विद्यार्थ्यांनी सादर केले.

महामंडळाच्या वतीने महाराष्ट्र गणित महर्षी पुरस्कार विलास आंबोळे (भोगावती हायस्कूल, शाहुनगर-कोल्हापूर) व विठ्ठल शिंदे (यशवंत विद्यालय, लातून) यांना सन्मानपत्रासह प्रदान करण्यात आला.

गणितरत्न पुरस्कार सिंधुर्दुर्ग जिल्ह्यातील अनंत जामसंडेकर (कुडाळ हायस्कूल), महेश सामंत (भंडारी हायस्कूल, मालवण), योगेश सामंत (कुडाळ हायस्कूल), संतोष वालावलकर (जामसंडे हायस्कूल, देवगड), संदीप शिंदे (वैभववाडी) यांना प्रदान करण्यात आले.

आदर्श गणित शिक्षक पुरस्कार प्रकाश कुलकर्णी (केळूस-वेंगुर्ले), तानाजी पाटील (वराड-मालवण), शमशुद्धीन अत्तार (शिरगांव देवगड), संभाजी नलगे (तळेरे-कणकवली), सुनील कुंभार (कोकिसरे-वैभववाडी), नरसिंह गावडे (कुडाळ), अर्जुन गावडे (दोडामार्ग), सूर्यकांत भुरे (सावंतवाडी) यांना मान्यवरांच्या हस्ते देण्यात आले.

यावेळी 'गणित शिक्षण' त्रैमासिकाचे विमोचन तसेच दीपक शेटे (कोल्हापूर) यांच्या 'गणित मांडणीचे शुद्धलेखन' या पुस्तकाचे प्रकाशन करण्यात आले.

दुसऱ्या सत्रात विद्याभारतीचे राष्ट्रीय उपाध्यक्ष दिलीप वसंत बेतकेकर यांचे 'शिक्षण बदलतयं आपणही बदलूया' या विषयावर अभ्यासपूर्ण व्याख्यान संपन्न झाले. जून्या-नव्या संघर्षातून नवनवीन शिकण्याची तयारी ठेवा असा संदेश त्यांनी दिला.

'गणित एक हापूस आंबा' या परिसंवादात सूत्रसंचालक रवींद्र महादेव येवले यांनी विशेष रंगत आणत विद्यार्थ्यांना बोलत करण्याचे कसब दाखविले. विद्यार्थ्यांच्या तार्किक क्षमता विकसित करायला हव्यात हे दाखल्यासह पटवून दिले. या परिसंवादामध्ये जिल्ह्यातील पालक सौ.सुवर्णा विजय प्रभूतेंडोलकर (कुडाळ), शिक्षक सुशांत रावसाहेब पाटील (असरोंडी-मालवण),

विद्यार्थी कैवल्य मिसाळ, संस्कृती सागर मिसाळ(मालवण टोपीवाला हायस्कूल)ण भिकाजी प्रभूतेंडोलकर (कुडाळ हायस्कूल) प्रांजल भूपतसेन सावंत, नेहा प्रभूतेंडोलकर (कुडाळ हायस्कूल), व परिसंवादाचे अध्यक्ष म्हणून तानाजी पाटील (मुख्याध्यापक वराड हायस्कूल) यांनी भाग घेतला.

‘गणित अध्यापनात माहिती तंत्रज्ञानाचा वापर’ या विषयावर शिरगांव हायस्कूल देवगडचे तंत्रस्नेही शिक्षक शमशुद्धीन अत्तार यांनी मौलिक मार्गदर्शन केले. ‘गुगल’ म्हणजे माहितीचा प्रचंड साठा तर ‘गुरुजी’ म्हणजे योग्य काय ते घ्यावे व तंत्रज्ञान कसे वापरावे हा महत्त्वाचा फरक त्यांनी विशद केला. स्लाईड-शो व्हारे त्यांनी विविध ‘अॅप’ बाबत मार्गदर्शन केले.

पहिल्या दिवशी रात्री कोकणातील पारंपारिक ‘दशावतार’ कला सादर केल्याने विशेष रंगत आली.

शनिवार दि.११ जानेवारी रोजी सकाळी विद्यार्थ्यांची राज्यस्तरीय गणित प्रश्नमंजुषा स्पर्धा घेण्यात आली. यामध्ये प्रथम-आस्था अंतुरकर व अर्णव पांडे(नागपूर), वितीय-केदार ढेपे, रौनक वेर्णकर (सोलापूर), तृतीय-विशाल भाकरे, प्रणय वंगवाड(लातूर), उत्तेजनार्थ म्हणून यशराज घाटोळ, शुभंकर रेळे(अकोला), साक्षी ठाकुर, मृणमयी नार्वेकर (कुडाळ-सिंधुदुर्ग) यांना गौरविण्यात आले, याचे सूत्रसंचालन पी.बी. पंचभाई यांनी केले.

‘माध्यमिक स्तरावरील गणिताचे तंत्रज्ञान युक्त अध्यापन’ या विषयावरील राज्य स्पर्धेतील प्रथम क्रमांक डॉ.गिरीश विठ्ठल वैद्य(वर्धा), वितीय-पुष्पलता दिलीप आडमुठे (सांगली), तृतीय-अश्विनी चौधरी (जळगांव) यांनाही गौरविण्यात आले.

‘प्राचीन सभ्यता व संख्याचिन्हे’ या विषयावर उमाकांत चंद्रकांत आवटे यांनी सचित्र अभ्यासपूर्ण मार्गदर्शन केले.

‘सर्वांसाठी गणित’ या विषयावर, नवनिर्मिती लर्निंग फाउंडेशनचे डॉ.विवेक मांटेरो व गीता महाशब्दे यांनी उपस्थितांशी संवाद साधला.

अधिवेशन समारोप कार्यक्रमाच्या पूर्वाधात कोकण विभाग पदवीधर मतदार संघाचे आमदार ॲड.निरंजन डावखरे यांच्या हस्ते ‘रामानुजन’ स्मरणिकेचे प्रकाशन करण्यात आले. यावेळी ॲड.निरंजन डावखरे, वसुंधराचे संस्थापक सी.बी.नाईक, स्मरणीकेसाठी उत्तम सहकार्य करणारे सलीम बैरागदार (कोल्हापूर) तसेच व्याख्यात्यांचा सत्कार करण्यात आला. जीवनात गणिताला खूप मोठे स्थान आहे. शिक्षकांना अशा अभ्यासपूर्ण अधिवेशनासाठी उपस्थित राहता

यावे यासाठी सोई सुविधा उपलब्ध करून देऊ असे आश्वासन ॲड.डावखरे यांनी दिले. ठाणे जिल्ह्यात असे अधिवेशन घ्यावे असेही त्यांनी सांगितले.

अधिवेशन समारोपाच्या उत्तरार्थात कार्यक्रमासाठी कोकण विभाग शिक्षक आमदार बाळाराम पाटील उपस्थित होते. संशोधन क्षेत्राचा आज विस्तार होतोय यामुळे गुणवत्ता वाढण्यासाठी अशी अधिवेशने महत्त्वाचे कार्य करतात, दिशा देतात असे त्यांनी सांगितले. अधिवेशनाच्या यशस्वी आयोजनाबद्दल त्यांनी सिंधुदुर्ग तसेच राज्य कार्यकारिणीचे अभिनंदन केले. गणित-विज्ञान सारख्या अधिवेशनासाठी शिक्षकांना उपस्थित राहता यावे यासाठी शासन स्तरावरुन योग्य न्याय देण्यात येईल, असेही त्यांनी सांगितले.

यावेळी आमदार पाटील यांचा सत्कार करण्यात आला. गणित प्रज्ञा परीक्षेत विशेष यश मिळवलेल्या विद्यार्थ्यांचा यावेळी आमदारांच्या हस्ते स्मृतिचिन्ह देऊन सत्कार करण्यात आला. इयत्ता १० वी गणित विषयात पैकीच्या पैकी गुण मिळवलेल्या विद्यार्थी व त्यांच्या शिक्षकांनाही यावेळी गौरवण्यात आले. या कार्यक्रमाचे सूत्रसंचालन सत्यवान लाड व प्रसाद कुबल यांनी केले.

पुढच्या वर्षीचे ४२ वे अधिवेशन अमरावती येथे होणार असल्याचे यावेळी जाहीर करण्यात आले.

अधिवेशन यशस्वी होण्यासाठी राज्य कार्यकारिणीच्या पदाधिकाऱ्यांसह सिंधुदुर्ग गणित अध्यापक मंडळाचे औदुंबर भागवत (मुख्याध्यापक, शिवडाव माध्यमिक विद्यालय, शिवडाव ता. कणकवली - राज्य पुरस्कार प्राप्त मुख्याध्यापक), अध्यक्ष वामन खोत (भंडारी हायस्कूल, मालवण), कार्यवाह तुकाराम पेडणेकर (काळसे हायस्कूल), यांच्यासह पदाधिकारी तसेच सत्यवान लाड, धोंडी गावडे, प्रसाद कुबल, दर्शना सामंत, राजाराम फर्जद, संतोष मेथे, भाऊसाहेब चवरे, दशरथ श्रृंगारे, शिवाजी ढाकणे, नागेश विरकर, देवानंद चव्हाण, विजयकुमार राठोड, संदीप शिंदे, महेश चव्हाण, नरसिंग गावडे, सुमुख जोशी, डी.एस.पाटील आर्दीनी मेहनत घेतली.

अधिवेशनासाठी राज्यभरातून ३०० च्यावर तर जिल्हाभरातून शिक्षक-विद्यार्थी-पालक मिळून ४०० अशी ७०० च्यावर उपस्थिती होती.

एकूणच महाराष्ट्र गणित अध्यापक महामंडळाचे ४१ वे राज्यस्तरीय गणित अधिवेशन सिंधुदुर्ग जिल्ह्याच्या इतिहासात दखलनीय ठरले एवढं मात्र निश्चित !

धन्यवाद !

राज्यस्तरीय गणित प्रश्नमंजुषा स्पर्धा संपन्न

महाराष्ट्र राज्य गणित अध्यापक महामंडळ, विद्या समितीतर्फे माध्यमिक शाळांतील इयत्ता ९ वी व १० वी च्या विद्यार्थ्यांसाठी गणित प्रश्नमंजुषा स्पर्धा आयोजित करण्यात आली. ही स्पर्धा दोन टप्प्यावर घेण्यात आली. पहिला टप्पा म्हणजे जिल्हास्तर आणि दुसरा राज्यस्तर. स्पर्धेचा कार्यक्रम नियम, अटी व शर्तीबाबत माहितीपत्रक विद्यासमितीतर्फे सर्व जिल्हा गणित अध्यापक मंडळांना पाठविण्यात आले. जिल्हा मंडळाने नोव्हेंबर अखेर पर्यंत स्पर्धा आयोजित करून जिल्हास्तरावर प्रथम क्रमांक प्राप्त व राज्यस्तरीय स्पर्धेसाठी पात्र ठरलेल्या चमूचे नाव (दोन विद्यार्थ्यांचा सहभाग असलेली चमू) विद्या समितीकडे डिसेंबर अखेर पर्यंत पाठविण्याचे आवाहन करण्यात आले होते. त्यानूसार राज्यातील फक्त सात जिल्हा गणित अध्यापक मंडळांनी जिल्हास्तरावर स्पर्धा घेवून राज्यस्तरीय स्पर्धेसाठी चमूंची नोंदणी केली. त्यामध्ये नागपूर, गोंदिया, लातूर, सिंधुदुर्ग व अकोला, वाशिम व सोलापूर जिल्ह्याचा समावेश होता.

राज्यस्तरीय गणित प्रश्नमंजुषा स्पर्धा महामंडळाचे राज्यस्तरीय अधिवेशन प्रसंगी आयोजित करण्यात येईल तसेच स्पर्धेचा कार्यक्रमाबाबत संबंधित सर्व जिल्हा गणित अध्यापक मंडळांना कळविण्यात आले. यावर्षी महाराष्ट्र गणित अध्यापक महामंडळातर्फे गणित शिक्षकांचे ४१ वे राज्य अधिवेशन सिंधुदुर्ग जिल्हा गणित अध्यापक मंडळाचे पुढाकाराने व सौजन्याने, वसुंधरा येथे कोकणातील निसर्गरम्यस्थळी शुक्रवार दि. १० व शनिवार दि. ११ जानेवारी २०२० रोजी आयोजित करण्यात आले.

शुक्रवार दि. १० जानेवारी रोजी राज्यस्तरीय स्पर्धेसाठी उपस्थित जिल्हा चमूंना नोंदणी करण्याचे आवाहन करण्यात आले व प्राथमिक फेरीचा (लेखी परिक्षा) कार्यक्रम जाहीर करण्यात आला. स्पर्धेत सहभाग घेतलेल्या सात जिल्हा चमूंपैकी फक्त पाच जिल्हा चमूंनी नोंदणी केली व प्रथम फेरीसाठी उपस्थिती दर्शविली. त्यामध्ये नागपूर, सोलापूर, अकोला, लातूर व सिंधुदुर्ग जिल्हा चमूंचा सहभाग होता. अंतिम फेरीसाठी फक्त पाच चमूंची निवड करायची होती व पाचच चमू उपस्थित असल्यामुळे लेखी परीक्षा न घेताच सर्व पाचही चमूंना अंतिम फेरीत प्रवेश देण्यात आला.

शनिवार दि. ११ जानेवारीला राज्यस्तरीय गणित प्रश्नमंजुषा स्पर्धेची अंतिम फेरी घेण्यात आली. या प्रसंगी राज्यातील विविध जिल्ह्यातून आलेले गणित शिक्षक बंधू-भगिनी सभागृहामध्ये मोठ्या संख्येने उपस्थित होते. प्रेषकांच्या उदंड प्रतिसादात व स्पर्धक विद्यार्थ्यांच्या उत्तम सादरीकरणामुळे अंतिम फेरी फारच उत्कंठापूर्ण रंजकदारपणे संपन्न झाली. स्पर्धेच्या शेवटी

निकाल जाहीर करण्यात आला. त्यामध्ये प्रथम क्रमांक : नागपूर जिल्हा चमू (१) कु.आस्था अंतुरकर व (२) अर्णव पांडे, द्वितीय क्रमांक : सोलापूर जिल्हा चमू (१) केदार ढेपे व (२) रौनक वेर्णकर, तृतीय क्रमांक : लातूर जिल्हा चमू (१) विशाल भाकरे व (२) प्रणय वंगवाड यांचा समावेश होता.

अधिवेशन समारोप प्रसंगी विधान परिषद सदस्य मा. आमदार निरंजन डावखरे यांचे हस्ते विजेत्या चमूतील विद्यार्थ्यांना पदक, प्रमाणपत्र व रोख रक्कम बक्षीस देऊन गौरविण्यात आले. अकोला व सिंधुदुर्ग जिल्हा चमूना सहभागाबद्दल प्रोत्साहनपर प्रमाणपत्र देण्यात आले.

विद्या समिती प्रमुख पुरुषोत्तम पंचभाई यांचे नेतृत्वात अजय पांडे, नरेन्द्र पिपरे, महेन्द्र टुळे, वैभव झाडे यांनी अंतिम फेरीचे उत्तमरित्या संचालन केले. दिलीप मेश्राम, जयघोष वालदेकर व गोवर्धन पाटील यांनी स्कोअरर म्हणून काम केले. सज्जन पाटील, मधुकर राऊत व दशरथ टेंभूरे यांनी स्पर्धेच्या आयोजनासाठी सहकार्य केले. महामंडळाचे अध्यक्ष सुनील श्रीवास्तव व सचिव संजय बाजी पाटील यांचे मार्गदर्शनाखाली स्पर्धा आयोजित करण्यात आली.

पुरुषोत्तम पंचभाई
विद्या समिती प्रमुख, नागपूर

Q. 1 (A) खालील प्रश्नांसाठी बहुपर्यायी उत्तरांतील अचूक पर्याय निवडा. (4)

- (1) ४ व २५ यांचे मध्यम प्रमाणपद खालीलपैकी कोणते ?
 [A] 6 [B] 8 [C] 10 [D] 12
- (2) २५-३५ ह्या वर्गाचा वर्ग मध्य कोणता ?
 [A] २५ [B] ३५ [C] ६० [D] ३०
- (3) $3x + 5y = 9$ आणि $5x + 3y = 7$ तर $x + y$ ची किंमत खालीलपैकी कोणती आहे ?
 [A] २ [B] १६ [C] ९ [D] ७
- (4) एका व्यक्तिने २०१८-१९ मध्ये मिळविलेल्या उत्पन्नाचे कर आकारणी वर्ष खालीलप्रमाणे कोणते ?
 [A] २०१७-२०१८ [B] २०१८-२०१९ [C] २०२०-२०२१ [D] २०१९-२०२०

Q. 1 (B) खालील प्रश्न सोडवा. (4)

- 1) ८१ वर्षीय श्रीमती सुनंदा काळे यांचे करपात्र उत्पन्न रु. ४,८९,००० असल्यास, त्यांना आयकर भरावा लागेल किंवा नाही ?
- 2) एका हॉकी खेळाडूने ९ सामन्यात केलेले गोल खालीलप्रमाणे आहेत. ५, ४, ०, २, २, ४, ४, ३, ३ यावरुन बहुलक काढा.
- 3) $x + y = 5$ या समीकरणाच्या दोन उकली लिहा.
- 4) दिलेल्या राशींपैकी पहिल्या राशीचे दुसऱ्या राशीशी असलेले गुणोत्तर संक्षिप्त रूपात लिहा.
 ३ वर्षे ४ महिने, ५ वर्षे ८ महिने.

Q. 2 (A) पुढीलपैकी कोणत्याही दोन कृती पूर्ण करून लिहा. (4)

1) खालील सारणी पूर्ण करा.

वर्ग (वय वर्षे)	12-13	13-14	14-15	15-16	
ताळ्याच्या खुणा	III	III III	III	□	
वारंवारता (f)(विद्यार्थी संख्या)	□	□	04	□	$N = 35$

2) यशवंतने 35000 रुपयांपैकी काही रक्कम 4% व उरलेली रक्कम 5% व्याजाने व एका वर्षासाठी गुंतवली.

त्याला एकूण व्याज 1530 मिळाले, तर त्याने वेगवेगळ्या व्याजाने गुंतवलेली रक्कम काढा.

3) पुढे दिलेल्या गुणोत्तरांच्या जोड्यांमधील लहान मोठेपणा ठरवा. $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{3}{\sqrt{7}}$

$$\text{कृती } \sqrt{5} \times \sqrt{7} = \boxed{\quad} ; 3 \times 3 = 9 \boxed{\quad}$$

$$\therefore \sqrt{35} \boxed{\quad} \sqrt{81} \quad \therefore \frac{\sqrt{5}}{3} \boxed{\quad} \frac{3}{\sqrt{7}}$$

Q. 2 (B) पुढीलपैकी कोणतेही चार उपप्रश्न सोडवा. (8)

- (1) एका टोपलीतील 10 टोमटोचे वजन ग्रॅममध्ये प्रत्येकी 60, 70, 90, 95, 50, 65, 70, 80, 85, 95 अशी आहेत. त्यावरुन टोमटोंच्या वजनांचा मध्यक काढा.
- (2) समर्थचे वय देवांशच्या वयाच्या निम्यापेक्षा 23 वर्षांनी जास्त आहे. पाच वर्षांपूर्वी त्यांच्या वयांची बेरीज 55 वर्षे होती, तर त्यांची आजची वये काढण्यासाठी समीकरणे तयार करा.
- (3) जर $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ तर $\frac{a+7b}{7b}$ हे गुणोत्तर काढा.
- (4) खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.
 - 1) आयकर कलम 80G अन्वये पंतप्रधान मदतनिधी दिल्यास आयकरात किती सूट मिळते.
 - 2) सामान्यत: एकूण गुंतवणूकीवर 80C या कलमान्वये विविध प्रकारच्या गुंतवणुकीपैकी जास्तीत जास्त किती रुपयापर्यंत वजावट मिळते.
- (5) 9, 12 व 16 या संख्या परंपरित प्रमाणात आहेत का ते ठरवा.

Q. 3 (A) पुढीलपैकी कोणतीही एक कृती पुर्ण करून लिहा. (3)

- 1) खालील सारणीमध्ये भारतातील पक्क्या रस्त्यांची व कच्चा रस्त्यांची माहिती दिली आहे. त्यावरुन विभजित व शतमान स्तंभालेख काढा. (शतमाने जवळच्या पूर्णांकापर्यंत घ्या.)

वर्षे	2000-2001	2001-2002	2003-2004	2007-2008
पक्के रस्ते (लक्ष कि.मी.)	14	15	17	20
कच्चे रस्ते (लक्ष कि.मी.)	10	11	13	19

- 2) खालील आकृतीत बाणाजवळ काही सुचना लिहील्या आहेत. त्यावरुन मिळणारे समीकरण बाणांपुढील चौकटीत लिहा.

मी आयत आहे. माझी लांबी x व रुंदी y आहे.	→ माझ्या लांबीच्या दुपटीतून रुंदी वजा केल्यास 25 मिळतात. → माझ्या लांबी व रुंदी यांची बेरीज 40 आहे. → माझ्या लांबी व रुंदीतील फरक 12 आहे. → माझी रुंदी लांबीच्या $3/5$ पट आहे. → माझी लांबी व रुंदीची बेरीज 50 आहे. → माझ्या लांबीच्या दुपटीत रुंदीची निमपट मिळवली तर 64 मिळतात.	→ → → → → →	
---	---	----------------------------	--

Q. 3 (B) पुढीलपैकी कोणतेही दोन उपप्रश्न सोडवा. (6)

- 1) दिलेली एकसामायिक समीकरणे सोडवा. $2x - 3y = 10; 4x - 5y = 15$
- 2) येथे 10 प्रासांक चढत्या क्रमाने मांडलेले आहेत. $2, 3, 5, 9, x + 1, x + 3, 14, 16, 19, 20$ जर त्यांचा मध्यक 11 आहे तर x ची किंमत काढा.
- 3) सोडवा. $\frac{12x^2 + 18x + 42}{18x^2 + 12x + 58} = \frac{2x+3}{3x+2}$

4) कैलासच्या उत्पन्नाच्या 85% इतका खर्च होत असे. त्याचे उत्पन्न 36% वाढले तेव्हा त्याचा खर्च पूर्वीच्या खर्चाच्या 40% वाढला. तर त्याची आता होणारी शेकडा बचत काढा.

Q. 4) पुढीलपैकी कोणतेही दोन उपप्रश्न सोडवा. (8)

- 1) 40 विद्यार्थीसंख्या असलेल्या वर्गामध्ये 16 मुळे आहेत. मुलांच्या प्राप्त गुणांची सरासरी 33 आहे व मुलींच्या प्राप्त गुणांची सरासरी गुण 35 आहे. सर्व विद्यार्थ्यांची प्राप्त गुणांची सरासरी काढा.

2) 3 पुस्तके आणि 10 पेनांची एकत्रीत किंमत रु.300/- आहे व 2 पुस्तके आणि 3 पेनांची एकत्रीत किंमत रु.145/- आहे. तर 1 पुस्तकाची आणि 3 पेनांची एकत्रीत किंमत काढा.

3) जर $\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{a+c-b} = \frac{z}{a+b-c}$
 तर सिध्द करा की $x(b-c) + y(c-a) + z(a-b) = 0$

Q. 5) पुढीलपैकी कोणताही एक उपप्रश्न सोडवा. (3)

- 1) दिलेल्या सारणीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

वर्ग (गुण)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	
वारंवारता (विद्यार्थी संख्या)	2	12	20	16	एकूण N = 50

सारील अंकातील उत्तरे .

ਪਾਜ ਕ ੧/ :- ਟੇਬਲ ਚੀ ਤੱਤੀ -

let's assume height of the table is T and
cat is C and R of tortoise

let's write down the equations

T + C - R ≡ 170cm

$T + R - C = 130\text{cm}$ add both the equations

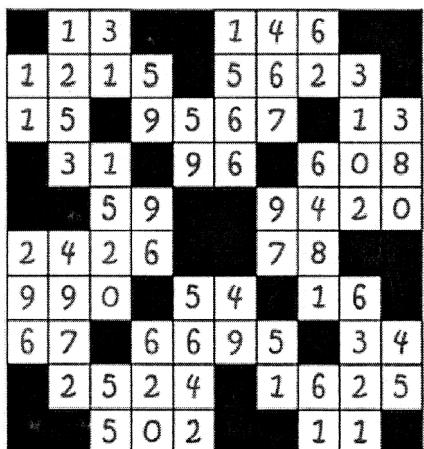
$$2T \pm C - R \pm R - C \equiv 170 \pm 130 \text{ cm}$$

$$2T = 300\text{cm} \quad T = 150\text{cm}.$$

पान क्र. २० :- गणितीय कोडे क्रमांक १

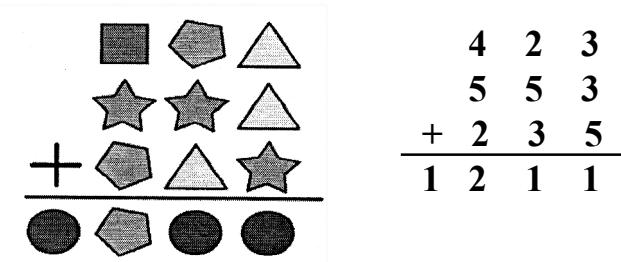
5	X	7	+	1	\	6	-	1	=	5
+	X		+		\		-			
3	+	1	-	4	X	3	\	1	=	0
X		+		X		+		+		
2	\	1	X	2	+	7	-	6	=	5
\	-		-			X		+		
4	-	2	+	6	\	1	-	3	=	5
=	=		=		=			=		
4	4.		4		9			9		

पान क्र. ४० :- सोडवा.



पान क्र. २४ व २५

पान क्र. २३ :- जरा डोके चालवा.



पान क्र. २० :- गणितीय कोडे क्रमांक २

24	29	22
23	25	27
28	21	26

प्रश्न क्रं.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
उत्तर	b	c	b	c	b	b	c	a	c	b	b	a	c	b	a
प्रश्न क्रं.	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
उत्तर	b	a	d	b	c	a	a	d	c	a	d	c	c	b	c

श्री भरत मुक्ताजी सोनवणे (सहा.शिक्षक) महाराष्ट्र विद्यालय निलंगा, ता.निलंगा जि.लातुर

चुकीची दुरुस्ती

पान क्र. १२

एकूण मूळ संख्या लक्षात ठेवा या कोडच्या मदतीने (4422322321)

४	४	२	२	३	२	२	३	२	१
१ ते १०	११ ते २०	२१ ते ३०	३१ ते ४०	४१ते ५०	५१ते ६०	६१ते ७०	७१ते ८०	८१ते ९०	९१ ते १००

१ ते १०० पर्यंत जोड मूळ संख्यांच्या ८ जोडच्या आहेत.

३-५, ५-७, ११-१३, १७-१९, २९-३१, ४१-४३, ५९-६१ व ७१-७३.

माहीत आहे का ?

प्रत्येक सम संख्या ही दोन मूळ संख्यांची बेरीज असते.

४ = २+२, ६ = ३+३, ८ = ३+५, १० = ३+७.....,

- १) राधाजवळ एकूण ७० रु.आहे. तिच्याजवळ २५ पैसे, ५० पैसे व १ रुपयाची समान नाणी असतील तर तिच्याजवळ एकूण किती नाणी आहेत ?
- २) काही माणसांनी २४ दिवसांत निम्मे काम केले. नंतर १८ माणसे पुन्हा कामावर बोलावली तर बाकी काम १६ दिवसांत पूर्ण झाले तर सुरुवातीला किती माणसे कामावर होती ?
- ३) सुहासचे लग्न सहा वर्षापूर्वी झाले. त्याचे आजचे वय हे त्याच्या लग्नाच्या वेळेच्या $\frac{5}{4}$ पट आहे. सुहासची बहीण सुहासिनी त्याच्यापेक्षा २ वर्षांनी लहान आहे. तर सुहासच्या लग्नाच्या वेळी सुहासिनीचे वय किती होते ?
- ४) $24^{23} + 25^{321} + 38^{1234}$ च्या उत्तराच्या एकक स्थानी कोणता अंक येईल ?
- ५) एका चिल्ड्रन्स पार्कमध्ये तिकिटीचा दर २५ रु. आहे. बालक दिवसानिमित्त्याने २०% सुट जाहीर केली. परिणाम स्वरूप आधीपेक्षा ४४% अधिक रक्कम जमा झाली. तर पार्कमध्ये येणाऱ्या मुलांच्या संख्येत किती टक्के वाढ झाली ?
- ६) एका भांड्यात १०० लिटर दूध आहे. त्यातील १० लिटर बाहेर काढले व त्याजागी तेवढेच पाणी घातले. तर त्या भांड्यात किती लिटर शुद्ध दूध शिळ्क राहिले ?
- ७) एक रक्कम ५ वर्षासाठी उधार दिली जाते. जर सरळ व्याजाचा दर वार्षिक ३% अधिक असता तर १८३० रु. जास्त प्राप्त झाले असते. तर उधार दिलेली रक्कम किती ?
- ८) १२ पुरुष किंवा १५ स्त्रिया एक काम १४ दिवसांत पूर्ण करतात. तर ७ पुरुष आणि ५ स्त्रिया मिळून तेच काम किती दिवसांत पूर्ण करतील ?
- ९) १९ सुतार १९ दिवसांत १९ खिडक्या बनवतो तर १ सुतार १९ खिडक्या किती दिवसांत बनवेल ?
- १०) अशी लहानात लहान संख्या शोधा की जिला १५ ने भागल्यास ५, २१ ने भागल्यास ११ व २८ ने भागल्यास १८ बाकी उरते.
- ११) एका पिशवीत २० सोडून बाकी लाल, २३ सोडून बाकी पिवळे, १८ सोडून बाकी हिरवे, १४ सोडून बाकी निळे चेंडू आहेत तर त्या पिशवित एकूण किती चेंडू आहेत ?
- १२) एका विद्यार्थ्याला परिक्षेत २०% गुण मिळाले आणि तो ५ गुणांनी नापास झाला. दुसऱ्या एका विद्यार्थ्याला ३०% गुण मिळाले पण त्याला पास होण्यासाठी आवश्यक गुणांपेक्षा २० गुण जास्त मिळाले. तर उत्तीर्ण होण्यासाठी किती टक्के गुण आवश्यक आहे ?
- १३) रेती आणि पाण्याच्या मिश्रणाच्या वजनात २०% रेती आहे. मिश्रणाला तापवून १२ किंवृ. पाणी कमी केल्यास मिश्रणात आता ३०% रेती आहे. तर मूळ मिश्रणात पाणी व रेती किती किंवृ. असेल ?
- १४) ‘अ’ ३ तासांत जेवढं काम करतो तेवढं ‘ब’ ४ तासांत करतो. ‘क’ ५ तासात जेवढं काम करतो तेवढ ‘ब’ ६ तासांत करतो. ‘अ’ संपूर्ण काम १८ तासांत करू शकतो. ‘क’ ने एकट्याने ११ तास काम केले तर शिळ्क काम ‘अ’ किती तासांत पूर्ण करेल ?
- १५) १ ते १५० पर्यंतच्या संख्यांचा गुणाकार केल्यास येणाऱ्या उत्तराच्या शेवटी किती शून्य येतील ?

गणिताचे जयगान

रचना... मनोहर काजरेकर

हिंदुभूमिचे सुपुत्र आम्ही मनी धरू अभिमान ।
एकमुखाने गाऊ सारे गणिताचे जयगान ॥१॥
आर्यभट्ट भास्कराचार्य ते
वराहमिहिर ब्रह्मगुप्त ते
रामानुजनहि देति जगाला एक नवे आहवान ॥२॥
शून्य एक ते आठ नऊ खरे
दशमानाचे घटकचि सारे
भारतीयांचे या विश्वाला असे नवे वरदान ॥३॥
योग-वियोग-गुणन-भाजन या
मूळभूत आहेत प्रक्रिया
स्वामी होऊन या सर्वांचे उभवू अपुली शान ॥४॥
गणितामधल्या गमती जमती
काळवेळ विसरुनी रंगती
का घाबरता उगा ? त्याकडे वळवा अपुले ध्यान ॥५॥
गणितामधुनी जीवन फुलते
प्रगतीचे मग पाऊल पडते
मानवनिर्मित शास्त्र ! परी त्या अग्रपूजेचा मान ॥६॥

मेख

संख्येमध्ये पहिला मी
कुठेही लपलेला असतो मी
अंशात-छेदात नसून आहे
सर्वांच्या खांद्यावर बसून आहे

माझा गुणाकार माझ्याशी मीच आहे
दुसऱ्याशी गुणल्यास वाढ कुठे आहे ?
मला मी भागल्यास मीच आहे
दुसऱ्यास भागल्यास मी कुठे आहे ?

माझ्यातून मी वजा गोल आहे
बघा असे माझे मोल आहे
माझ्यावर सर्वांचे प्रेम आहे
पैशावर पटवण्याचा नेम आहे
सांगा पाहू...
ओळखलं का मला ?
मी आहे एक
सर्व संख्यांची मेख

- प्र.वि.घोरबांड

(गणित अध्यापक)

महात्मा फुले हायस्कूल,
बाबानगर, नांदेड

गणित विषय ज्ञान व गणिताची भाषा

संकलन - श्री नवनाथ घुरे (सर)

एम.एस्सी.बी.एड.(गणित)

नृसिंह माध्य.विद्यालय,भातोडी,ता.जि.अहमदनगर

संपर्क - ९४२१७७०६०६

विद्यार्थ्यांना गणित हा विषय अवघड वाटतो, कारण त्याला गणिताची भाषा समजलेली नसते गणित हे एक शास्त्र आहे. शास्त्राला जशी त्याची शास्त्रीय भाषा आहे तशीच गणितालाही त्याची एक विशिष्ट भाषा आहे. ही भाषा माहित असल्याखेरीज विद्यार्थी गणितात प्रगती करू शकणार नाही म्हणूनच गणिताची भाषा कशी असते हे पाहूया.

गणित हा शब्द 'गण' या मूळ संस्कृत धातुपासून तयार झाला आहे. या 'गण' धातुचा अर्थ मोजणे असा आहे. म्हणून गणित म्हणजे मोजमापाचे शास्त्र.

फार प्राचीन काळी मानवाला गणना करण्याची गरज भासू लागली तेव्हा तो सहज उपलब्ध आणि ओळखीच्या वस्तुचे साहाय्य घेवून एकास एक संगती लावून मोजदाद करू लागला. परंतु ही पद्धत प्रत्येक वेळी वापरणे क्लिष्ट असल्याने तिचा विकास होऊ शकला नाही. त्यानंतर काही काळाने मानवाने अंक शोधून काढले असता अंक म्हणजे तरी काय ? ज्याप्रमाणे आपण लिपीसाठी वर्गाचा किंवा अक्षरांचा आधार घेतो त्याचप्रमाणे गणित या शास्त्रामध्ये किंवा मोजमापनामध्ये आपण जी चिन्हे वापरतो ती चिन्हे म्हणजे गणिताची भाषाच होय.

गणिताच्या भाषेमध्ये प्रथम विकास झाला तो अंकाचा. हे मूळ अंक १ ते ९ आहेत. पूर्वी फक्त १ ते ९ पर्यंतच अंक प्रचारात होते. इसवी सनापूर्वी काही वर्षे एका भारतीयानेच शून्य (०) या चिन्हाचा शोध लावला आणि मग गणित या शास्त्राला पुर्णत्व प्राप्त होऊन या शास्त्रात प्रचंड क्रांती झाली.

गटाच्या संख्येने गणना करणे हाच अंक पद्धतीचा मूळ पाया आहे. वरील १ ते ९ चिन्हे व नंतरचा शून्याचा शोध यांच्या साहाय्याने दहा चिन्हांच्या प्रतीकाचा एक एक गट तयार करण्यात येवून या अंकाच्या स्थानावरून त्याचे मुल्य ठरविण्यात येवू लागले. या पद्धतीस दशमान पद्धती म्हणतात. हा शोध भारतीयच आहे. दशमान पद्धती या गणिती भाषेमुळेच संख्याचा अर्थ समजू लागला जसे ६६६ मध्ये प्रत्येक ६ या अंकाची किंमत वेगळी आहे. म्हणजे संख्येतील अंकांना विशिष्ट स्थान दिले असता त्याची किंमत किती हे कळते. या स्थानांची एकक, दशक, शतक आदी नावे म्हणजे गणिताची भाषाच होय.

जसजसा गणिती भाषेचा विकास होत गेला तसेतसे अंकाचे वर्गीकरण करण्यात आले व त्या त्या गटाचे गणिती भाषेतील शब्दाने प्रतिनिधित्व केले.

असे गणिती भाषेतील प्राधिनिधिक शब्द व त्यांचे अर्थ

गणिती भाषेतील शब्द

स्पष्टीकरण

१) मोजसंख्या	१, २, ३, ४,
२) पूर्ण संख्या	०, १, २, ३, ४,
३) पूर्णांक संख्या-३, -२, -१, ०, १, २, ३, ४,
४) सम संख्या	२, ४, ६, ८
५) विषम संख्या	३, ५, ७, ९
६) मूळ संख्या	२, ३, ५, ७, ११
७) संयुक्त संख्या	४, ६, ८, ९, १०, १२

संख्याप्रणालीचा विकास होण्यास अंकावरील क्रिया कारणीभूत ठरल्या. अंकावरील क्रियामध्ये चार मूलभूत क्रिया मानल्या जातात.

१) बेरीज २) वजाबाकी ३) गुणाकार ४) भागाकार हे शब्द विशिष्ट क्रियेसाठी वापरले असल्याने हे गणिती भाषिक शब्द आहेत. या गणिती भाषेतील शब्दाचे अर्थ पुढील प्रमाणे

- | | |
|---------------|--|
| १) बेरीज :- | एकाहून अनेक संख्या एकमेकात मिळवून अखेरीस एका संख्येत रूपांतर करणे. |
| २) वजाबाकी :- | दिलेल्या दोन संख्यांमधील फरक |
| ३) गुणाकार :- | दिलेल्या संख्येची दिलेल्या पटीतील बेरीज होय. |
| ४) भागाकार :- | दिलेल्या संख्येतून दिलेली दुसरी संख्या किती वेळा वजा जाऊ शकते हे पाहण्याची क्रिया. |

वरील क्रियामध्ये क्रियांसाठी अनुक्रमे + , - , ×, ÷ ही गणिती भाषेतील चिन्हे वापरल्याने मोठा शब्द जंजाळ टाळता येतो. आपले म्हणणे थोडक्यात अचूक व मुद्देसूद मांडता येते. सर्वच गणिती भाषेतील चिन्हे व शब्द यांचे अर्थ किंवा स्पष्टीकरण न देता अशा गणिती भाषेतील चिन्हे व शब्द यांची यादी दिली आहे.

* गणित भाषेतील चिन्हे :-

+ , - , ×, ÷ , < , >, =, $\pi\sqrt{\quad}$, ०, १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९,

* गणिताची पाच क्षेत्रे :-

१) संख्याज्ञान, २) संख्यावरील क्रिया, ३) मापन, ४) अपूर्णांक, ५) भूमिती

* गणित भाषेतील संबोधदर्शक शब्द :-

क्षेत्रफळ, घनफळ, परिमिती, परीघ, पृष्ठफळ, त्रिकोणाची उंची, शिरोलंब, मध्यगा, एक सपाट रेषा, रेषाखंड, किरण, अंत्यबिंदू, शिरोबिंदू, त्रिज्या, व्यास, अर्धवर्तुळ, परिकेंद्र, त्रिकोणाचे आंतरवर्तुळ, वहिवर्तुळ, स्पर्शिका, छेदिका, प्रामांक, मध्यमान, चरण, निर्देशक, चल, सहगुणक, घातांक, एकपदी, बहुपदी, दुभाजक, आंतरखंडीत कंस, आंतरलिखित कोन, केंद्रीय कोन ही यादी आपण आणखी वाढवू शकतो.

वरील चिन्हे व गणिती भाषेतील संबोध विद्यार्थ्यांना समजावून सांगितल्यास, त्याचे अर्थ वाचण्याची पद्धत व वापर विद्यार्थ्यांकडून झाल्यास तो गणिताची भाषा समजेल व त्याला गणित विषय सोपा वाटेल व आपणास किमान उद्दिष्टे गाठता येतील.

- संकलित

“रूपये का इतिहास” अवश्य पढें-प्राचीन भारतीय मुद्रा

बच्चों को भी जरुर पढायें...

* फूटी कौडी	से कौडी	२५६ दमडी = १९२ पाई = १२८ घेला =
* कौडी	से दमडी	६४ पैसा (Old) = १६ आना = १ रुपया
* दमडी	से घेला	१) ३ फुटी कौडी = १ कौडी
* घेला	से पाई	२) १० कौडी = १ दमडी
* पाई	से पैसा	३) २ दमडी = १ घेला
* पैसा	से आना	४) १.५ पाई = १ घेला
* आना	से रुपया बना	५) ३ पाई = १ पैसा (पुराना)
		६) ४ पैसा = १ आना
		७) १६ आना = १ रुपया

प्राचिन मुद्रा की इन्हीं ईकाइयों ने हमारी बोल-चाल की भाषा को कई कहावतें दी हैं।

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| १) एक फूटी कौडी भी नहीं दूँगा। | २) घेले का काम नहीं करती हमारी बहु। |
| ३) चमडी जाए पर दमडी न जाए। | ४) पाई-पाई का हिसाब रखना। |
| ५) सोलह आने सच। | |

गणित पारंगत नमुना उत्तर पत्रिका २०१९-२०

प्र.1 A) ०,१,२,३,४ यापैकी अंक घेऊन दोन अंकी संख्या तयार करायची आहे. अंकाची पुनरावृती केलेली चालेल तर खालील घटनांची संख्यांच्या प्रतीत असणे

1) ती मूळ संख्या असणे 2) ती संख्या ४ च्या पटीत असणे

उत्तर : $S = \{10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 24, 30, 31, 32, 33, 34, 40, 41, 42, 43, 44\} \therefore n(S) = 20$

$$\begin{array}{l|l} A = \{11, 13, 23, 31, 41, 43\} & \therefore n(A) = 6 \\ P(A) = n(A) \div n(S) & \\ = 6 \div 20 & \therefore P(A) = 3/6 \end{array} \quad \begin{array}{l|l} B = \{12, 20, 24, 32, 40, 44\} & \therefore n(B) = 6 \\ P(B) = n(B) \div n(S) & \\ = 6 \div 20 & \therefore P(B) = 3/6 \end{array}$$

B) सिद्ध करा : $\sec^6 x - \tan^6 x = 1 + 3\sec^2 x \tan^2 x$

$$\begin{aligned} \text{उत्तर} : \sec^6 x - \tan^6 x &= (\sec^2 x - \tan^2 x)(\sec^4 x + \tan^4 x + \sec^2 x \tan^2 x) \\ &= (1)[(\sec^2 x - \tan^2 x)^2 + 2\sec^2 x \tan^2 x + \sec^2 x \tan^2 x] = 1 + 3\sec^2 x \tan^2 x \end{aligned}$$

C) अवयव पद्धतीने सोडवा : $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2}$

$$\begin{array}{l|l} \text{उत्तर} : \sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0 & \therefore (\sqrt{2}x + 5)(x + \sqrt{2}) = 0 \\ \therefore \sqrt{2}x^2 + 5x + 2x + 5\sqrt{2} = 0 & \therefore (\sqrt{2}x + 5) = 0 \text{ किंवा } (x + \sqrt{2}) = 0 \\ \therefore x(\sqrt{2}x + 5) + \sqrt{2}(\sqrt{2}x + 5) = 0 & \therefore x = -5/\sqrt{2} \text{ किंवा } x = -\sqrt{2} \end{array}$$

D) ΔABC मध्ये रेख $AP \perp$ रेख BC (B-P-C) रेख $BQ \perp$ रेख AC (A-Q-C) तर $\Delta CPA \sim \Delta CQB$

दाखवा. जर $AP = 7$, $BQ = 8$, $BC = 12$ तर AC काढा.

उत्तर : ΔCPA व $\sim \Delta CQB$ मध्ये,

$$\begin{array}{l} \angle C \cong \angle C \dots \text{सामाईक} \quad \frac{CP}{CQ} = \frac{AC}{BC} \text{ समरूप त्रिकोणाच्या संगतभुजा} \\ \text{व } \angle CPA \cong \angle CQB \dots \text{प्रत्येकी } 90^\circ \quad \therefore \frac{7}{8} = \frac{AC}{12} \end{array}$$

$\Delta CPA \sim \Delta CQB$ को-को समरूपता $\therefore AC = 10.5$

E) सकाळी ८ ते १० यावेळेत शहरातील एका चौकातील सिग्नलवरून पुढे जाणा च्या विविध वाहनांच्या संख्यांची शतमाने शेजारील वृत्तलेखात दिली आहेत. तर

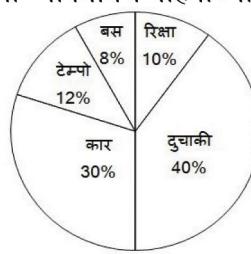
- 1) टेम्पो व बस या वाहनासाठी केंद्रीय कोनाचे माप काढा.
- 2) दुचाकीची संख्या १२०० असल्यास वाहनांची एकूण संख्या कढा.

उत्तर : केंद्रीय कोनाचे माप = $(घटक X 360) \div 100$

$$\text{टेम्पो साठी} = (12X360) \div 100 = 43.2^\circ$$

$$\text{बस साठी} = (8X360) \div 100 = 28.8^\circ \quad \text{दुचाकी साठी} = (40X360) \div 100 = 144^\circ$$

$$\text{वाहनांची एकूण संख्या} = (1200 X 360) \div 144 = 3000$$



प्र 2 A) A(8,9) आणि B(1,2) यांना जोडणा न्या रेख AB चे P(k,7) हा बिंदू कोणत्या गुणोत्तरात विभाजन करतो ते काढा.

उत्तर : समजा A= (x₁,y₁) ∴ x₁ = 8 , y₁ = 9 व B = (x₂,y₂) ∴ x₂ = 1, y₂ = 2

आणि P=(x,y) ∴ x = k, y = 7 अंतर विभाजन सुत्रानुसार y = (my₂+ny₁) ÷(m + n)

$$\begin{array}{l|l|l} \therefore 7(m+n) = (2m+9n) & x = (mx_2+nx_1) \div (m+n) \\ \therefore 7m+7n = 2m+9n & \therefore k = [2(1)+5(8)] \div (2+5) & \therefore k = (42) \div (7) \\ \therefore m:n = 2:5 & \therefore k = (2+40) \div (7) & \therefore k = 6 \end{array}$$

B) एका अंकगणिती श्रेणीचे नववे पद शून्य आहे तर 29 वे पद हे 19 व्या पदाच्या दुप्पट आहे हे दाखवा.

उत्तर : समजा प्रथम पद a व सामाईक फरक d असेल

$$\begin{array}{l|l|l} t_n = a + (n-1)d & \therefore t_{19} = a + 18d & \therefore t_{29} = 2(t_{19}) - (t_9) \\ \therefore t_9 = a + 8d & \therefore t_{29} = a + 28d & \therefore t_{29} = 2(t_{19}) - (0) \\ \therefore a + 8d = 0 & \therefore t_{29} = 2a + 36d - a - 8d & \therefore t_{29} = 2(t_{19}) \end{array}$$

C) व्यास 12 सेमी व जाडी 0.01 मीटर असलेल्या एक धातुचा पोकळ गोल आहे. धातुची घनता 8.88 ग्रॉम प्रति घनसेंटीमीटर असल्यास त्या गोलाचे वस्तुमान काढा.

The diameter and thickness of a hollow metal sphere are 12 cm and 0.01 meter

respectively. The density of the sphere is 8.88 gm/cm³. Find the mass of the sphere.

उत्तर : गोलाची बाह्य त्रिज्या r₁ = 6 सेमी व आतील त्रिज्या r₂ = 5 सेमी.

$$\text{पोकळ गोलाचे घनफळ} = \frac{4}{3} \pi (r_1^3 - r_2^3) = \frac{4}{3} \times 3.14 (6^3 - 5^3) = \frac{4}{3} \times 3.14 (91) = 380.99 \text{ cm}^3$$

$$\text{गोलाचे वस्तुमान} = \text{गोलाचे घनफळ} \times \text{गोलाची घनता} = 380.99 \times 8.88 = 3383.19 \text{ ग्रॉम}$$

D) मिस्टर डिसोझा यांनी दर्शनी किंमतीचे 200 शेअर्स 100 रुपये अधिमुल्यावर खरेदी केले. त्यावर कंपनीने 50% लाभांश दिला. लाभांश मिळाल्यावर त्यातील 100 शेअर्स 10 रुपये अवमुल्याने विकले व उरलेले शेअर्स 75 रुपये अधिमुल्याने विकले. प्रत्येक व्यवहारात 20 रुपये दलाली दिली, तर त्यांना या व्यवहारात नफा झाला किंतु तोटा? किंती रुपये?

$$\text{एका शेअर्स साठी गुंतवणूक} = 50 + 100 = 150 \text{ रु. } \therefore \text{एकूण गुंतवणूक} = 200 \times 150 + 20 = 30020 \text{ रु.}$$

$$200 \text{ शेअर्स विकून मिळालेली रक्कम} = 100(50-10) + 100(50+75) - 40$$

$$= 4000 + 12500 - 40 = 16460 \text{ रु}$$

$$200 \text{ शेअर्स वरील लाभांश} = 200 \times 50 \times 50/100 = 5000 \text{ रु}$$

$$\text{तोटा} = \text{गुंतवणूक} - \text{लाभांश} - \text{शेअर्स विकून मिळालेली रक्कम} = 30020 - 5000 - 16460 = 8560 \text{ रु}$$

E) 3.6 सेमी त्रिज्येचे वर्तुळ काढा. या वर्तुळाला त्या वरील कोणत्याही बिंदून वर्तुळकेंद्र विचारात न घेता स्पर्शिका काढा.

प्र 3 .A) क्रेमरच्या पद्धतीने (creamer's method) पुढील समिकरण सोडवा

$$\frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} = \frac{3x-y}{4}$$

$$\text{उत्तर : } \frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} \therefore x-y = -4 \quad \frac{3x-y}{4} = \frac{x+2y-14}{3} \therefore 5x-11y = -56$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -11 \end{vmatrix} = -11 + 5 = -6$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-12}{-6} = 2;$$

$$Dx = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -56 & -11 \end{vmatrix} = 44 - 56 = -12$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-36}{-6} = 6$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -56 \end{vmatrix} = -56 + 20 = -36$$

$$\therefore (x, y) = (2, 6)$$

B) वर्तुळाच्या जिवाना सामावणा त्या रेषा वर्तुळाच्या बाह्यभागात छेदत असतील तर त्या रेषामधील कोनाचे माप त्या कोनाने आंतरखंडीत केलेल्या कंसाच्या मापाच्या फरकाच्या निम्ने असते हे सिद्ध करा.

"If two lines containing chords of a circle intersect each other outside the circle , then prove that the measure of angle between them is half the difference in the measure of the arc intercepted by the angle."

उत्तर : रेख AD जोडा, $m\angle ADC = \frac{1}{2} m(\text{कंसAC})$. अंतरलिखित कोनाचे प्रमेय

$m\angle DAB = \frac{1}{2} m(\text{कंस BD})$ अंतरलिखित कोनाचे प्रमेय

$m\angle ADC = m\angle DAE + m\angle E$ दुरस्त अंतर कोनाचे प्रमेय

$$\therefore \frac{1}{2} m(\text{कंसAC}) = \frac{1}{2} m(\text{कंसBD}) + m\angle E \therefore m\angle E = \frac{1}{2} [m(\text{कंसAC}) - m(\text{कंसBD})]$$

C) एक झाड प्रत्येक वर्षी पुर्वीच्या वर्षापेक्षा 5 सेमीने कमी वाढते. जर ते झाड पहिल्यावर्षी 1 मीटर उंचीचे असेल तर किती वर्षांनी ते झाड वाढायचे थांबेल?

उत्तर समजा प्रथम पद a व सामाईक फरक d असे मानु $t_1=a=100$ सेमी आणि $d=-5$

$$\therefore t_n = a + (n-1)d$$

$$\therefore t_n = 105 - 5n$$

$$\therefore 0 = 105 - 5n$$

$$\therefore t_n = 100 + (n-1)(-5)$$

$$\text{परंतु } \therefore t_n = 0$$

$$\therefore 5n = 105 \therefore n=21$$

21 वर्षांनी झाडाची वाढ होणार नाही.

D) ΔABC मध्ये रेख $DE \parallel$ रेख AB , रेख $BD \parallel$ रेख EF तर सिद्ध करा की : $DE^2 = CF \times AC$

उत्तर : $\Delta CDE \sim \Delta CAB$ को को समरूपता

$$\therefore \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} \dots \text{(i)} \text{ समरूप त्रिकोणाच्या संगतभुजा}$$

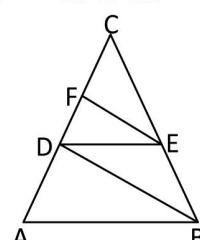
$\Delta CFE \sim \Delta CDB$... कोको समरूपता

$$\therefore \frac{CF}{CD} = \frac{CE}{CB} \dots \text{(ii)} \text{ समरूप त्रिकोणाच्या संगतभुजा}$$

I आणि II वरून

$$\therefore \frac{CD}{CA} = \frac{CF}{CB}$$

$$\therefore DE^2 = CF \times AC$$



E) 1 जानेवारी 1800 ला रविवार होता तर त्या वर्षात 53 रविवार येण्याची संभाव्यता काढा.

उत्तर: 1 जानेवारी 1800 हे सामन्य वर्ष आहे. सामान्य वर्षात 365 दिवस असतात.

365दिवस 52 =आठवडे व दिवस 1

उरलेल्या 1 दिवसाचा नमुना अवकाश S={रविवार, सोमवार, मंगळवार, बुधवार, गुरुवार, शुक्रवार, शनिवार}

$\therefore n(S) = 7$ A ही घटना तो वार रविवार येण्याची आहे.

$\therefore A = \{\text{रविवार}\} \therefore n(A) = 1 \therefore P(A) = n(A) \div n(S) = 1/7$

प्र. 4 A) श्री नानासाहेब यांनी एका दिवसात एकूण 60700 रुपये किंमतीच्या शेअर्सची विक्री केली व 208950 रुपये किंमतीच्या शेअर्स खरीदी केली त्या दिवशीच्या एकूण खरेदी विक्रीवर 0.1% दराने दलाली व दलालीवर 18% वस्तू व सेवाकर दिल. तर या व्यवहारात दलाली आणि वस्तू व सेवाकरावरील एकूण खर्च काढा.

$$\begin{array}{l|l} 60700 \text{ रु वरील दलाली} = 60700 \times 0.1 \div 100 & 208950 \text{ रु वरील दलाली} = 208950 \times 0.1 \div 100 \\ = 60.70 \text{ रु} & = 208.95 \text{ रु} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 60.70 \text{ रु वरील जी.एस.टी} = 60.70 \times 18 \div 100 & 208.95 \text{ रु वरील जी.एस.टी} = 208.95 \times 18 \div 100 \\ = 10.926 = 10.93 \text{ रु} & = 37.611 = 37.61 \text{ रु} \end{array}$$

या व्यवहारातील दलाली आणि वस्तू व सेवाकरावरील एकूण खर्च
 $= 60.70 \text{ रु} + 10.93 \text{ रु} + 208.95 \text{ रु} + 37.61 \text{ रु} = 318.19 \text{ रु.}$

B) एका तळ्याच्या पृष्ठभागापासून h मी. उंचीवरून ढगाकडे पाहिले असता होणारा उन्नत कोन α मापाचा होतो. आणि त्याच ठिकाणाहून तळ्यामधील ढगाच्या प्रतिबिंबाकडे पाहिले असता होणारा अवनत कोन β मापचा होतो. तर निरीक्षकाच्या ठिकाणापासून ढगाचे अंतर $\frac{2h \sec \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha}$ असते हे दाखव.

उत्तर: समजा AB तळ्याचा पृष्ठभाग, P निरीक्षकाचे स्थान $AP = BQ = h$,

$m\angle CPQ = \alpha, m\angle QPD = \beta$ समजा CQ = x मी $\therefore BC = BD = x + h$

ΔPQC मध्ये,

$$\sin \alpha = \frac{CQ}{CP} = \frac{x}{CP}$$

$$\therefore x = CP \sin \alpha \dots\dots(i)$$

$$\tan \alpha = \frac{CQ}{PQ} = \frac{x}{PQ}$$

$$\therefore PQ = \frac{x}{\tan \alpha} \dots\dots(ii)$$

$$\Delta PQD$$
 मध्ये, $\tan \beta = \frac{QD}{PQ} = \frac{h+x+h}{PQ}$

$$\therefore PQ = \frac{2h+x}{\tan \beta} \dots\dots(iii)$$

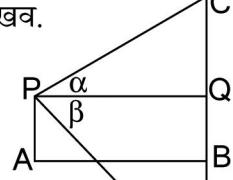
$$(ii) \text{ व } (iii) \text{ वरून } \frac{x}{\tan \alpha} = \frac{2h+x}{\tan \beta}$$

$$\therefore x \tan \beta = 2htan \alpha + xtan \alpha$$

$$\therefore x \tan \beta - x \tan \alpha = 2htan \alpha$$

$$\begin{aligned} & \therefore x = \frac{2htan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha} \dots\dots(iv) \\ & (i) \text{ व } (iv) \text{ वरून} \\ & CP \sin \alpha = \frac{2htan \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha} \end{aligned}$$

$$\therefore CP = \frac{2h \sec \alpha}{\tan \beta - \tan \alpha}$$



C) खालील सारणीचे मध्यक(Median) 52.2 असून त्याच्या वारंवारतेची बेरीज (sum for frequency)

100 आहे तर x व y च्या किंमती काढा.

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
वारंवारता	2	5	x	12	17	20	y	9	7	4
संचीत वारंवारता	2	7	$x+7$	$x+19$	$x+36$	$x+56$	$x+y+56$	$x+y+65$	$x+y+72$	$x+y+76$

$$\text{उत्तर : मध्यक} = 52.5$$

$\therefore 50-60$ हा मध्यक वर्ग आहे

$$\therefore L=50, f=20,$$

$$N/2=50, h=10$$

$$\text{मध्यक} = L + [N/2 - cf] X h/f$$

$$52.5 = 50 + [50 - 36 - x] X 10/20$$

$$2.5 \times 2 = 14 - x$$

$$\therefore x = 14 - 5$$

$$\therefore x = 9$$

$$\text{व } 76 + x + y = 100$$

$$76 + 9 + y = 100$$

$$\therefore y = 100 - 85 = 15$$

D) ΔABC काढा, ज्या मध्ये $AB=5$ सेमी, $BC=6$ सेमी व $\angle ABC = 60^\circ$. ΔABC ला समरूप असणारा

ΔADE असा काढा की त्याच्या संगत बाजु ΔABC च्या बाजुच्या $4/5$ असतील.

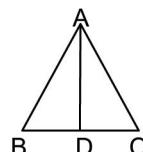
E) $x + 3y = 6$ आणि $2x - 3y = 12$ या समिक्रणाचे आलेख काढा. या रेषांनी X अक्षाशी केलेल्या

छेदन बिंदूचे निर्देशक लिहा. तसेच या रेषा व Y अक्ष यांच्यामुळे तयार झालेल्या त्रिकोनाचे क्षेत्रफल काढा.

उत्तर : क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 6 \times 18$ चौ. एकक.

प्र.5 A) एका समबिंदुज त्रिकोनाचे क्षेत्रफल 540 चौ.सेमी आहे. त्याच्या एकरूप

बाजुची लांबी 39 सेमी आहे. तर त्याच्या पायाची लांबी काढा.



रेख $AD \perp$ रेख BC ,

ΔABC पायथागोरसच्या प्रमेयावरून

$$\text{समजा } AD=h \text{ व } BC=2x$$

$$\therefore BD = DC = x$$

$$A(\Delta ABC) = \frac{1}{2} \times 2x \times h$$

$$\therefore 540 = \frac{1}{2} \times 2x \times h$$

$$\therefore 1080 = 2x \times h \dots\dots(i)$$

$$\therefore h^2 + x^2 = (39)^2$$

$$\therefore h^2 + x^2 = 1521 \dots(ii)$$

$$(i) \text{ व } (ii) \text{ ची बेरीज करून}$$

$$h^2 + x^2 + 2xh = 2601$$

$$\therefore (x+h)^2 = 2601$$

$$\therefore h + x = 51 \dots(iii)$$

$$(ii) \text{ वजा } (i) \text{ करून}$$

$$h^2 + x^2 - 2xh = 441$$

$$\therefore (x-h)^2 = 441$$

$$\therefore x - h = 21 \dots(iv)$$

(iii) व (iv) ची बेरीज करून $2x = 72$ पाया $BC = 72$ सेमी

B) दोन वर्षापूर्वी एका गृहस्थाचे वय त्याच्या मुलाच्या त्यावेळच्या वयाच्या वर्गाच्या तिप्पट होते. तीन

वर्षानंतर त्या गृहस्थाचे वय त्याच्या मुलाच्या त्या वेळच्या वयाच्या चौपट होईल. तर त्यांची वये काढा.

समजा मुलाचे 2वर्षापूर्वीचे वय x वर्षे मानू .. त्याचे आजचे वय $x+2$ वर्षे व 3 वर्षा नंतर चे वय $(x+5)$ वर्षे.

वडीलांचे 2 वर्षापूर्वीचे वय $3x^2$ वर्षे व त्यांचे आजचे वय $(3x^2 + 2)$ व 3 वर्षा नंतरचे वय $(3x^2 + 5)$ वर्षे

अटी वरून $(3x^2 + 5) = 4(x + 5)$

$$\begin{array}{l} \therefore 3x^2 - 4x - 15 = 0 \\ \therefore 3x^2 - 9x + 5x - 15 = 0 \\ 3x^2 - 9x + 5x - 15 = 0 \end{array} \quad \parallel \quad \begin{array}{l} \therefore (x-3)(3x+5) = 0 \\ \therefore (x-3) = 0 \text{ किंवा } (3x+5) = 0 \\ \therefore x = 3 \text{ किंवा } x = -5/3 (\text{अग्रही वय ऋण नसते}) \end{array}$$

\therefore मुलाचे आजचे वय $x+2=3+2=5$ वर्षे व वडीलांचे आजचे वय $(3)3^2 + 2 = 29$ वर्षे.

C) A(7,1), B(3,5) आणि C(2,0) शिरोबिंदू असलेल्या त्रिकोणाच्या परिवर्तुळाच्या केंद्राचे निर्देशक (coordinates of circumcentre) आणि परिवर्तुळाची त्रिज्या काढा.

उत्तर समजा वर्तुळ केंद्र : O(h, k) व $OA^2 = OB^2 = OC^2 \dots\dots\dots$ एकाच वर्तुळाच्या त्रिज्या.

$$\therefore (h-7)^2 + (k-1)^2 = (h-3)^2 + (k-5)^2 = (h-2)^2 + (k-0)^2$$

$$\therefore h^2 - 14h + 49 + k^2 - 2k + 1 = h^2 - 6h + 9 + k^2 - 10k + 25 = h^2 - 4h + 4 + k^2$$

$$\text{जर } OA^2 = OC^2 \text{ तर } h^2 - 14h + 49 + k^2 - 2k + 1 = h^2 - 4h + 4 + k^2 \therefore 5h + k = 23 \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{जर } OB^2 = OC^2 \text{ तर } h^2 - 6h + 9 + k^2 - 10k + 25 = h^2 - 4h + 4 + k^2 \therefore h + 5k = 15 \dots\dots\dots (ii)$$

$$(ii) X 5 \text{ मधून } (i) \text{ वजाकरून } 24k = 52 \therefore k = 13/6 \quad (i) \text{ वरून } 5h + 13/6 = 23 \therefore h = 25/6$$

$$\therefore OC^2 = (25/6 - 2)^2 + (13/6 - 0)^2 = (\frac{13}{6})^2 + (\frac{13}{6})^2 = 2 \times (\frac{13}{6})^2$$

$$\therefore OC = \sqrt{2} \frac{13}{6} \therefore \text{त्रिज्या} = \sqrt{2} \frac{13}{6} \text{ व परिवर्तुळाच्या केंद्राचे निर्देशक} = (25/6, 13/6)$$

D) $(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$ या वर्गसमीकरणाच्या उकली समान वास्तव संख्या(roots are real and equal) असतील तर b, a, c या अंकगणिती श्रेढीत(AP) आहेत हे दाखवा.

उत्तर : $(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$ ची तुलना $Ax^2 + Bx + C = 0$ शीकरून

$$A = (a-b), B = (b-c), C = (c-a) \text{ परंतु उकली समान आहेत} \therefore B^2 - 4AC = 0$$

$$(b-c)^2 - 4(a-b)(c-a) = 0 \therefore b^2 - 2bc + c^2 - 4(ac - a^2 - bc + ab) = 0$$

$$\therefore b^2 - 2bc + c^2 - 4ac - 4a^2 + 4bc - 4ab = 0$$

$$\therefore 4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab + 2bc - 4ac = 0$$

$$\therefore (2a - b - c)^2 = 0$$

$$\therefore 2a - b - c = 0 \therefore a - b = c - a$$

\therefore b, a, c हे अंकगणिती श्रेढीत(AP) आहेत.

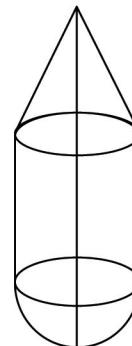
E) सोबतच्या आकृतीत दिल्या प्रमाणे शंकूची लंबउंची 15 सेमी आहे.

खेळण्याची एकूण उंची 40 सेमी आहे. जर अर्धगोलाची त्रिज्या 7 सेमी आहे.

तर खेळण्याचे घनफल काढा.

उत्तर: समजा त्रिज्या : r, वृत्तचितीची उंची H, शंकूची लंबउंची h $\therefore h =$ सेमी 15 व $r = 7$ सेमी

खेळण्याची एकूण ऊंची = $H + h + r$ $\therefore H = 40 - 15 - 7 \therefore H = 18$ सेमी



खेळण्याचे घनफल = अर्धगोलाचे घनफल + वृत्तचितीचे घनफल + शंकूचे घनफल

$$= \frac{2}{3} \pi r^3 + \pi r^2 H + \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 (2r + 3H + h)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 (2 \times 7 + 3 \times 18 + 15)$$

$$= \frac{1}{3} \times 22 \times 7 (14 + 54 + 15) = \frac{12782}{3} = 4260.67 \text{ सेमी}$$

प्र 6A) $ax^2 + bx + c = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे $\frac{k+1}{k}$ व $\frac{k+2}{k+1}$ असतील तर दाखवा की $(a + b + c)^2 = b^2 - 4ac$

उत्तर : $ax^2 + bx + c = 0$ या वर्गसमीकरणाची मुळे $\frac{k+1}{k}$ व $\frac{k+2}{k+1}$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{k+1}{k} \times \frac{k+2}{k+1} &= \frac{c}{a} \quad \left| \begin{aligned} \therefore \frac{k+1}{k} + \frac{k+2}{k+1} &= \frac{-b}{a} \\ \therefore (a+k+2) &= kc \end{aligned} \right| \quad \therefore (a+c)^2 + 2b(a+c) = -4ac \\ \therefore ak + 2a &= ck \quad \left| \begin{aligned} \therefore \frac{\frac{2a}{(c-a)} + 1}{\frac{2a}{(c-a)}} + \frac{\frac{2a}{(c-a)} + 2}{\frac{2a}{(c-a)} + 1} &= \frac{-b}{a} \\ \therefore k(c-a) &= 2a \end{aligned} \right| \quad \therefore (a+c)(a+c+2b) = -4ac \\ \therefore k(c-a) &= 2a \quad \left| \begin{aligned} \therefore \frac{a+c}{2a} + \frac{2c}{a+c} &= \frac{-b}{a} \\ \therefore \frac{(a+c)^2 + 4ac}{2a(a+c)} &= \frac{-b}{a} \end{aligned} \right| \quad \therefore (a+c+b-b)(a+c+b+b) = -4ac \\ \therefore k = \frac{2a}{(c-a)} & \quad \left| \begin{aligned} \therefore (a+c)^2 + 4ac &= -2b(a+c) \end{aligned} \right| \quad \therefore (a+c+b)^2 - b^2 = -4ac \\ & \quad \therefore (a+c+b)^2 = b^2 - 4ac \end{aligned}$$

B) $\triangle ABC$ मध्ये $\angle ABC = 90^\circ$ AB व्यास मानून काढलेले अर्धवर्तुळ कर्ण AC ला P मध्ये छेदते.

तर P मध्यन काढलेली स्पर्शिका बाजु BC ला दुभागते हे सिद्ध करा.

उत्तर : BP जोडा $m\angle BPA = 90^\circ$ अर्धवर्तुळील आंतरलीखीत

काटकोन Δ लघुकोन कोटीकोन असतात $\therefore \angle BAC + \angle BCA = 90^\circ$ (i)

$\angle BPA + \angle BPC = 180^\circ$ रेषीय जोडीतील कोन (A-P-C)

$$\therefore \angle BPA + \angle BPM + \angle MPC = 180^\circ$$

$$\therefore 90^\circ + \angle BPM + \angle MPC = 180^\circ \quad \therefore \angle BPM + \angle MPC = 90^\circ \text{ ...(ii)}$$

$$m\angle BAP = \frac{1}{2} m(\text{कंस } BP) \quad \text{व}$$

$$m\angle MPB = \frac{1}{2} m(\text{कंस } BP)$$

$$\therefore m\angle BAP = m\angle MPB \text{(iii)}$$

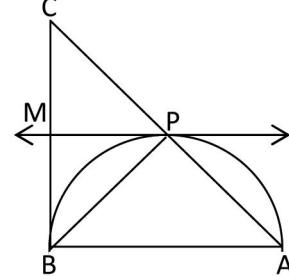
$$\therefore \text{(i), (ii) आणि (iii) वरून } \angle BCA = \angle MPC \text{(iv)}$$

\therefore रेख MC \cong रेख MP(v) एकरूप कोना समोरील भुजा (iv) वरून

\therefore रेख MB \cong रेख MP(vi) M बिंदून वर्तुळास काढलेले स्पर्शखंड

विधान (v) व (vi) वरून \therefore रेख MB \cong रेख MC

\therefore P बिंदून काढलेली स्पर्शिका BC ला दुभागते



महाराष्ट्र गणित अध्यापक महामंडळ

कार्यकारिणी मंडळ



श्री सुनिल ओ.श्रीवास्तव
अध्यक्ष



श्री संजय ना.वाजी याठील
कार्यवाह



श्री तत्यासाहेब र.शिंदे
उपाध्यक्ष



श्री ओंकुर शि.मगावत
उपाध्यक्ष



श्री बालासाहेब स.शिंदे
उपाध्यक्ष



श्री ललित ना.लामखेडे
सहकार्यवाह



श्री दिनेश कि.पाळसकर
सहकार्यवाह



श्री प्रेमचंद कि.बोंडे
सदस्य



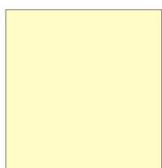
श्री प्रकाश नि.यांदरे
सदस्य



श्री बन्सी आ.हावले
सदस्य



श्री सुनिल ना.नगमोते
सदस्य



श्री हेमंत गो. देशपांडे
सदस्य



श्री गणेश पु. कावरे
सदस्य



श्री नारेशवर पु. सारे
सदस्य



श्री शिवचरण क.बिरजादार
वरीक्षा समिती प्रमुख



श्री दिनेश कि.पाळसकर
गणित शिक्षण समिती प्रमुख



श्री पुरुषोत्तम मि.पंचभाई
विद्या समिती प्रमुख

(छापील मजकूर)

प्रति, _____

प्रेषक,

श्री दिनेश किसनराव यलसकर

तुषार कॉलनी, कारंजा(लाड)

जि.वाशिम : ४४४ १०७



महाराष्ट्र गणित अध्यायक महामंडळ प्रकाशने

(विक्रीसाठी उपलब्ध)

अ.क्रं. पुस्तकाचे नांव

- १ गणित संबोध मार्गदर्शिका- इयत्ता ५ वी २०/-
- २ गणित संबोध मार्गदर्शिका- इयत्ता ८ वी ३०/-
- ३ गणित प्रावीण्य- इयत्ता ५ वी ७७/-
- ४ गणित प्रावीण्य- इयत्ता ८ वी ७७/-
- ५ गणित प्रज्ञा मार्गदर्शिका- इयत्ता ५ वी ४७/-
- ६ गणित प्रज्ञा मार्गदर्शिका- इयत्ता ८ वी ४७/-
- ७ गणित प्रज्ञा - ले. श्री. वा. के. वाड ३७/-
- ८ गणित प्रावीण्य- प्रज्ञा प्रश्नसंच-इयत्ता ५वी ३७/-
- ९ गणित प्रावीण्य- प्रज्ञा प्रश्नसंच-इयत्ता ८वी ४०/-
- १० उलट करून गुणिले-पण का? प्रा.म.रा.राईलकर २२/-
- ११ मेंदुला खुराक-कै.रा.गो.कुंटे १००/-
- १२ गंमत गणिताची-दि.कृ.गोटखिंडकर ५०/-
- १३ गणित विचार ६/-
- १४ A Guide to Mathematical Concepts Std.V २०/-
- १५ A Guide to Mathematical Concepts Std.VIII ३०/-
- १६ Ganit Pradnya Margdarshika Std. V ४७/-
- १७ Ganit Pradnya Margdarshika Std. VIII ४७/-
- १८ Mathex for Std. V ७७/-
- १९ Mathex for Std. VIII ७७/-
- २० Mathematics Talent Search Part-I Std. V ३७/-
- २१ Mathematics Talent Search Part-II Std. VIII २७/-
- २२ Question Paper Set-Pravinya & Pradnya Std.V ३७/-
- २३ Question Paper Set-Pravinya & Pradnya Std.VIII ३७/-

किंमत



महाराष्ट्र गणित अध्यायक महामंडळ (महाराष्ट्र राज्य)

अध्यक्ष

श्री सुनिल अंगेकारप्रसाद श्रीवास्तव
सिहील लाईन,
हनुमान चौक, गोदावरी

कार्यवाह

श्री संजय नाशयणराव बाजी पाटील
प्लाट नं.८, माऊली नगर,
बीड बायपास रोड,
सुर्यो लॉन्स जवळ, औरंगाबाद

प्रकाशन समिती प्रमुख,

श्री हेमंत गोपाळ देशपांडे
३६३,
यादो गोपाळ पेठ,
सातारा

Dsdby: Raja Gore, 9823296496